
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MAURO FABRIZIO

**Problemi di unicità per le equazioni funzionali non
lineari del campo elettromagnetico. Nota I**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 49 (1970), n.3-4, p.
200–207.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_49_3-4_200_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Problemi di unicità per le equazioni funzionali non lineari del campo elettromagnetico* (*). Nota I (**) di MAURO FABRIZIO, presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — We reduce the problem of the uniqueness for the quasi-linear system of functional equations of the electromagnetic field to prove the existence for the relative linear functional system.

1. In tempi recenti sono stati studiati in modo particolare campi elettromagnetici in cui le *equazioni costitutive*, cioè le relazioni fra i vettori *spostamento* \mathbf{D} , *induzione* \mathbf{B} , *densità di corrente* \mathbf{J} e i vettori *campo elettrico* \mathbf{E} , *campo magnetico* \mathbf{H} , sono non lineari [1]. Inoltre per tener conto dei fenomeni di isteresi e di altri fenomeni che si incontrano nell'ottica non lineare e nell'elettromagnetismo si è supposto non solo non lineari, ma anche ereditarie le relazioni costitutive [1], [2].

Teoremi di unicità per le equazioni del campo elettromagnetico corredate da opportune condizioni iniziali e al contorno sono stati ottenuti nel caso non lineare, ma in assenza di termini ereditari da G. Pignedoli [3] e nel caso ereditario da G. Pettini [4]. Però in tutti questi lavori il campo \mathbf{E} , \mathbf{H} è stato supposto di classe C^1 rispetto al tempo e alle variabili spaziali. Ora per problemi non lineari, anche nelle ipotesi di sufficiente regolarità sui dati iniziali e alla frontiera, non si può a priori ammettere la regolarità del campo elettromagnetico.

Ho pensato quindi necessario riformulare il problema mediante un concetto più debole di soluzione, in modo da pervenire alla formulazione di un teorema di unicità per una classe molto ampia di soluzioni. La questione dell'unicità delle soluzioni deboli per equazioni *quasi-lineari* riveste un certo interesse in quanto si può mostrare, anche con semplici esempi, che codesta unicità non sussiste in generale. Questo è dovuto all'esistenza di soluzioni non stabili rispetto ad una piccola perturbazione e dotate di particolari discontinuità [5], [6].

La trattazione e i risultati di questa ricerca sono contenuti in due parti distinte. Nella Nota I ho anzitutto ricondotto il problema dell'unicità per un sistema di equazioni quasi-lineari alla dimostrazione dell'esistenza del corrispondente sistema lineare. Questa tecnica fu iniziata dalla O. A. Oleinik [5]

(*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei gruppi di ricerca per la matematica del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1970.

per un problema di Cauchy relativo alla equazione unidimensionale della fluidodinamica. Successivamente altri autori, limitandosi sempre al problema di Cauchy, hanno cercato di generalizzare questo risultato secondo due direzioni:

- a) per sistemi simmetrici di equazioni del primo ordine in una sola variabile spaziale [7];
- b) per equazioni in più variabili spaziali [8], [9].

In questo lavoro come già detto, sono riuscito a dimostrare tale dualità più generalmente per un problema ai valori iniziali e al contorno relativo alle equazioni funzionali del campo elettromagnetico. Ora, poiché abbiamo supposto le relazioni costitutive ereditarie, il problema lineare che in queste ipotesi si ottiene è costituito dalle equazioni di Maxwell in cui i funzionali costitutivi sono lineari e descrivono un mezzo ereditario non omogeneo e variabile col tempo. Purtroppo non mi è riuscito trovare nella letteratura teoremi di esistenza per equazioni di questo tipo, che mi riservo di studiare in un prossimo lavoro. Nella Nota II mi sono perciò limitato al caso non ereditario ottenendo così un teorema di unicità sotto ipotesi molto ampie su \mathbf{E} , \mathbf{H} .

Non è inutile notare che questo procedimento può essere applicato anche ad altre questioni di fisica non lineare come per esempio alla magnetofluidodinamica.

2. Sia Ω un dominio non necessariamente limitato di \mathbb{R}^3 (spazio euclideo tridimensionale), $x = (x_1, x_2, x_3)$ un punto di \mathbb{R}^3 e $I = \{t; t \in (0, T)\}$ un intervallo della variabile temporale t . Il campo elettromagnetico, nelle ipotesi di sufficiente regolarità per \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , soddisfa l'usuale sistema di equazioni:

$$(I,1) \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad \text{in } Q = \Omega \times I.$$

$$(I,2) \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}$$

Nella teoria dei fenomeni non lineari ed *ereditari* un mezzo è definito da equazioni costitutive che legano le grandezze che caratterizzano il processo. Questi legami sono espressi da equazioni funzionali del tipo:

$$f(t) = \tilde{f}(\gamma(t); \gamma^t)$$

dove γ^t è una funzione di $s \in (0, \infty)$ definita:

$$\gamma^t(s) = \gamma(t - s)$$

che si è soliti chiamare « storia » di γ al tempo t .

Noi ci limiteremo a studiare materiali per cui i vettori spostamento $\mathbf{D}(x, t)$, induzione magnetica $\mathbf{B}(x, t)$ e densità di corrente $\mathbf{J}(x, t)$ sono deter-

minati dalle relazioni, che supporremo fin d'ora sufficientemente regolari:

$$(I,3) \quad \mathbf{D}(x, t) = \tilde{\mathbf{D}}(x, \mathbf{E}(x, t), \mathbf{H}(x, t); \mathbf{E}^t(x, s), \mathbf{H}^t(x, s))$$

$$(I,4) \quad \mathbf{B}(x, t) = \tilde{\mathbf{B}}(x, \mathbf{E}(x, t), \mathbf{H}(x, t); \mathbf{E}^t(x, s), \mathbf{H}^t(x, s))$$

$$(I,5) \quad \mathbf{J}(x, t) = \tilde{\mathbf{J}}(x, \mathbf{E}(x, t), \mathbf{H}(x, t); \mathbf{E}^t(x, s), \mathbf{H}^t(x, s)).$$

Nel seguito supporremo inoltre, che per ogni fissato $x \in \Omega$ l'insieme di definizione dei funzionali $\tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{J}}$ sia costituito da uno spazio di Hilbert \mathfrak{H} del tipo usato da B. D. Coleman e W. Noll nella teoria della « *Fading Memory* » [10] [11] ⁽¹⁾. Detto ciò osserviamo che è possibile dimostrare come il secondo principio della termodinamica imponga delle limitazioni sui funzionali (I,3), (I,4). Questi risultati, contenuti in un lavoro di B. D. Coleman e E. H. Dill [16] di prossima pubblicazione, che del resto sono stati da me ritrovati indipendentemente, affermano fra l'altro:

$$(I,6) \quad \frac{dD_i}{dE_j} = \frac{dD_j}{dE_i} \quad (2) \quad , \quad \frac{dD_i}{dH_j} = \frac{dB_j}{dE_i} \quad , \quad \frac{dB_i}{dH_j} = \frac{dB_j}{dH_i}$$

dove $D_i, E_i, B_i, H_i, (i = 1, 2, 3)$ sono le componenti dei vettori $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$.

Inoltre con considerazioni di tipo energetico relative alla velocità di propagazione, si può supporre i funzionali $\tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{B}}$ tali che:

$$(I,7) \quad \sum_1^3 \sum_{ij} \frac{dD_i}{dE_j} \xi_i \xi_j + 2 \sum_1^3 \sum_{ij} \frac{dD_i}{dH_j} \xi_i \eta_j + \sum_1^3 \sum_{ij} \frac{dB_i}{dH_j} \eta_i \eta_j \geq c \sum_1^3 (\xi_i^2 + \eta_i^2)$$

per tutti i vettori $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, essendo c un numero positivo.

Il problema ai valori iniziali e al contorno che studieremo oltre a soddisfare il sistema di equazioni (I,1), (I,2) verifica le ulteriori condizioni:

$$(I,8) \quad \mathbf{E}(x, t) = \mathbf{e}^0(x, t) \quad , \quad \mathbf{H}(x, t) = \mathbf{h}^0(x, t) \quad \text{per } t \in (-\infty, 0]$$

i vettori \mathbf{e}^0 e \mathbf{h}^0 sono noti in $\Omega \times (-\infty, 0]$ e tali che le funzioni $\mathbf{e}^0(x, -s), \mathbf{h}^0(x, -s)$ per $s \in [0, \infty)$ appartengono al dominio di definizione di $\tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{J}}$.

Infine sul contorno di Ω che supporremo sufficientemente regolare:

$$(I,9) \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{g}(x, t) \quad \text{in } \partial\Omega \times I$$

dove $\partial\Omega$ indica la frontiera di Ω e \mathbf{n} la normale esterna al dominio Ω .

(1) Vedi anche B. D. Coleman [12].

(2) Dove con dD_i/dE_j intendiamo di rappresentare la derivata istantanea di $D_i(x, t)$ rispetto al valore attuale di $E_j(x, t)$. Vedi B. D. Coleman [12] o B. D. Coleman e V. J. Mizel [13]. La stessa definizione vale per le analoghe espressioni. Devo inoltre ricordare che le relazioni (I,6) mi furono suggerite per la prima volta dal prof. B. D. Coleman durante una conversazione avvenuta nell'Ottobre del 1969.

Osserviamo subito che in virtù di (I,3), (I,4) e di (I,8) si ha:

$$(I,10) \quad \mathbf{D}(x, 0) = \tilde{\mathbf{D}}(x, \mathbf{e}^0(x, 0), \mathbf{h}^0(x, 0); \mathbf{e}^0(x, -s), \mathbf{h}^0(x, -s))$$

$$(I,11) \quad \mathbf{B}(x, 0) = \tilde{\mathbf{B}}(x, \mathbf{e}^0(x, 0), \mathbf{h}^0(x, 0); \mathbf{e}^0(x, -s), \mathbf{h}^0(x, -s))$$

i vettori $\mathbf{D}(x, 0)$, $\mathbf{B}(x, 0)$ sono pertanto noti in Ω .

3. Come si è accennato in 1 è nostro scopo pervenire ad un teorema di unicità in una classe piuttosto vasta di soluzioni.

Perciò è necessaria una nuova formulazione del problema che non pretenda l'esistenza delle derivate e che si riduca a quello ordinario se \mathbf{E} ed \mathbf{H} sono di classe C^1 . Questo si può ottenere mediante una impostazione variazionale del problema. Per ottenere ciò riprendiamo le equazioni (I,1), (I,2) e moltiplichiamole rispettivamente per Ψ , Φ , questi vettori li supporremo sufficientemente regolari, a supporto limitato in Ω e tali che

$$\Phi \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{in } \partial\Omega \times I \quad \text{e} \quad \Phi(x, T) = \Psi(x, T) = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Quindi dopo una opportuna integrazione per parti rispetto al tempo e mediante il teorema della divergenza si ottiene con semplici passaggi:

$$(I,12) \quad \int_Q (\mathbf{H} \cdot \nabla \times \Phi + \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mathbf{J} \cdot \Phi) dx dt + \int_{\Omega} \mathbf{D}(x, 0) \cdot \Phi(x, 0) dx = 0$$

$$(I,13) \quad \int_Q (\mathbf{E} \cdot \nabla \times \Psi - \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t}) dx dt + \int_I \int_{\partial\Omega} \Psi \cdot \mathbf{g} d\sigma dt - \int_{\Omega} \mathbf{B}(x, 0) \cdot \Psi(x, 0) dx = 0.$$

Intenderemo quindi, più in generale, per soluzione la coppia di vettori \mathbf{E} , \mathbf{H} che verifichi le identità (I,12), (I,13) per qualunque Φ , Ψ .

Affinché le equazioni (I,12), (I,13) abbiano senso occorre che i campi \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{J} siano di quadrato sommabile su ogni insieme limitato di Q , mentre per Φ , Ψ è sufficiente che esista in senso debole ${}^{(3)} \nabla \times \Phi$, $\nabla \times \Psi$, $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ e che queste quantità risultino di quadrato sommabile.

Al fine di dare una concisa e più precisa definizione di soluzione debole è necessario introdurre certi spazi di funzioni. Iniziamo coll'indicare:

$$L_2(\Omega) = \left\{ \mathbf{A}(x) : \mathbf{A} \text{ è una funzione a valori in } \mathbb{R}^3 \right. \\ \left. \text{misurabile in } \Omega \text{ e tale che } \int_{\Omega} |\mathbf{A}^2| dx < \infty \right\}.$$

(3) Il $\nabla \times \Phi$ esiste in senso debole nell'insieme delle funzioni di quadrato sommabile ed è uguale a Γ se, per quasi tutti i $t \in I$, vale l'identità:

$$\int_{\Omega} \Phi \cdot \nabla \times \Theta dx = \int_{\Omega} \Gamma \cdot \Theta dx$$

per tutti i Θ infinitamente differenziabili e a supporto compatto in Ω . Analoga definizione vale per $\partial \Phi / \partial t$.

Consideriamo poi l'insieme delle funzioni $\mathbf{F}(x, t)$ definite in I e a valori in $L_2(\Omega)$. Definiamo quindi alcuni spazi di funzioni che ci saranno utili nel seguito:

$$L_2(I, L_2(\Omega)) = \left\{ \mathbf{F}(x, t) : \mathbf{F} \text{ è misurabile in } I, \int_0^T \|\mathbf{F}(t)\|_{L_2(\Omega)} dt < \infty \right\}$$

$$L_2^1(I, L_2(\Omega)) = \left\{ \mathbf{F}(x, t) : \mathbf{F}, \frac{d}{dt} \mathbf{F} \text{ appartengono a } L_2(I, L_2(\Omega)) \right\}$$

$$L_2^{\text{loc}}(Q) = \left\{ \mathbf{F}(x, t) : \mathbf{F} \text{ è misurabile in } Q, \int_0^T \int_{\Omega \cap K} |\mathbf{F}|^2 dx dt < \infty \right.$$

dove K è un insieme limitato di \mathbb{R}^3 $\left. \right\}$

$$L_2(\nabla \times ; \Omega) = \{ \mathbf{A}(x) : \mathbf{A} \in L_2(\Omega) ; \nabla \times \mathbf{A} \in L_2(\Omega) \}.$$

DEFINIZIONE. $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_2^{\text{loc}}(Q)$ rappresentano una soluzione debole del sistema (I,1), (I,2) con condizione (I,8), (I,9) e relazioni costitutive del tipo (I,3), (I,4), (I,5) se verificano le equazioni (I,12), (I,13) per tutti i Φ, Ψ a supporto limitato in Q e tali che:

$$\Phi \in S = \{ \Phi(x, t) : \Phi \in L_2(I, L_2(\nabla x, \mathbb{R}^3)) \times L_2^1(I, L_2(\Omega)) ; \Phi \times \mathbf{n} = 0 \text{ su } \partial\Omega \times I, \Phi(x, T) = 0 \} \quad (\text{I,14})$$

$$\Psi \in R = \{ \Psi(x, t) : \Psi \in L_2(I, L_2(\nabla x, \mathbb{R}^3)) \times L_2^1(I, L_2(\Omega)) ; \Psi(x, T) = 0 \}.$$

Per gli sviluppi matematici è conveniente indicare con u la coppia ordinata $[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ e quindi con $u^t = [\mathbf{E}^t, \mathbf{H}^t]$, inoltre $F = [\mathbf{D}, \mathbf{B}]$, $G = [\mathbf{J}, 0]$, $F_0 = [\mathbf{D}(x, 0), \mathbf{B}(x, 0)]$ e infine $\varphi = [\Phi, \Psi] \in S \times R$.

Con questo formalismo il sistema (I,1), (I,2) si può esprimere più concisamente (4):

$$(\text{I,15}) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \Lambda^i \frac{\partial u}{\partial x_i} - G$$

dove $F = \tilde{F}(x, u; u^t)$, $G = G(x, u; u^t)$ e Λ^i ($i = 1, 2, 3$) sono matrici 6×6 simmetriche. Nel seguito supporremo $G \equiv 0$ soltanto per brevità di calcolo, ma i risultati sono facilmente estendibili al caso $G \neq 0$.

Inoltre se indichiamo con $\delta^k \tilde{F}$ il differenziale di Fréchet di ordine k della \tilde{F} rispetto a u^t , per le ipotesi di sufficiente regolarità di \tilde{D}, \tilde{B} e quindi di \tilde{F} supporremo che esistano i funzionali $\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial u_j}, \frac{\partial^2 \tilde{F}_i}{\partial u_j \partial u_l}$ (5), $\delta \tilde{F}, \delta^2 \tilde{F}$ e siano limitati su tutto il dominio di definizione.

(4) Vedi [14] pag. 176.

(5) Con F_i e u_i intendiamo ovviamente di rappresentare le componenti dei vettori F, u .

Scriviamo infine le equazioni (I, 12), (I, 13) secondo la nuova simbologia:

$$(I, 16) \int_Q \left(u, \Lambda^i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) - \left(F, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dx dt - \int_{\Omega} (F_0(x), \varphi(x, 0)) dx - \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \Psi d\sigma dt = 0$$

dove con $(,)$ indichiamo il prodotto scalare nello spazio euclideo a sei dimensioni, mentre $\varphi \in S \times R$.

4. Per determinare la classe di funzioni per la quale è possibile stabilire un teorema di unicità, supponiamo che esistano in queste classi due soluzioni deboli $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ di (I, 15) con le medesime condizioni ai limiti del tipo (I, 8), (I, 9). Se dimostreremo che:

$$(I, 17) \int_Q (f, u_1 - u_2) dx dt = 0$$

per ogni $f(x, t)$ assolutamente continua e a supporto limitato in Q ; il teorema sarà provato poiché (I, 17) è verificata soltanto se $u_1 = u_2$ quasi dappertutto in Q .

Osserviamo ora che per ogni $x \in \Omega$:

$$(I, 18) \begin{aligned} & \tilde{F}(x, u_1; u_1^t) - \tilde{F}(x, u_2; u_2^t) = \\ &= \int_0^1 \frac{d}{d\tau} \tilde{F}(x, \tau u_1 + (1 - \tau) u_2; \tau u_1^t + (1 - \tau) u_2^t) d\tau = \\ &= \int_0^1 [\nabla_u \tilde{F}(x, \tau u_1 + (1 - \tau) u_2; \tau u_1^t + (1 - \tau) u_2^t) (u_1 - u_2) + \\ &+ \delta \tilde{F}(x, \tau u_1 + (1 - \tau) u_2; u_1^t + (1 - \tau) u_2^t u_1^t - u_2^t)] d\tau \end{aligned}$$

dove per ogni fissato x, t il funzionale $\delta \tilde{F}$ è lineare rispetto a $u_1^t - u_2^t$ che possiamo pensare, per le proprietà di \mathcal{H} , appartenente sempre ad $L_2(0, t)$. Ora se indichiamo con $A(x, t)$ il tensore

$$(I, 19) \quad A(x, t) = \int_0^1 \nabla_u \tilde{F}(x, \tau u_1 + (1 - \tau) u_2; \tau u_1^t + (1 - \tau) u_2^t) d\tau$$

per le ipotesi (I, 7) su \tilde{D} , \tilde{B} e quindi su \tilde{F} , $A(x, t)$ risulta per ogni (x, t) simmetrico e definito positivo, cioè per tutti i $\xi = [\xi, \eta]$

$$(A\xi, \xi) \geq c(\xi, \xi)$$

Ricordando che il funzionale $\delta \tilde{F}(x, \tau u_1 + (1 - \tau) u_2; \tau u_1^t + (1 - \tau) u_2^t u_1^t - u_2^t)$ è lineare per tutti i $(u_1^t - u_2^t) \in L_2(0, t)$ si ha per il teorema di rappresentazione di Riesz [15] che deve esistere un tensore $B(x, t, s)$ che per ogni $(x, t) \in Q$

appartiene a $L_2(0, t)$ e per cui:

$$(I,20) \quad \int_0^1 \delta \tilde{F}(x; \tau u_1 + (1 - \tau) u_2; \tau u_1' + (1 - \tau) u_2', u_1' - u_2') d\tau = \\ = \int_0^t B(x, t, s) (u_1(s) - u_2(s)) ds.$$

Pertanto (I,18) si può esprimere mediante $A(x, t)$ e $B(x, t, s)$, nel seguente modo:

$$(I,21) \quad \tilde{F}(x, u_1, u_1') - \tilde{F}(x, u_2, u_2') = A(x, t) (u_1 - u_2) + \\ + \int_0^t B(x, t, s) (u_1(s) - u_2(s)) ds.$$

Dalla definizione (I,16) di soluzione debole si ha:

$$(I,22) \quad \int_Q (u_1 - u_2, \Lambda^i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}) dx dt = \int_Q (\tilde{F}(x, u_1, u_1') - \tilde{F}(x, u_2, u_2'), \frac{\partial \varphi}{\partial t}) dx dt \\ \int_Q \left[\left(A(u_1 - u_2), \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \left(\int_0^1 B(x, t, s) (u_1(s) - u_2(s)) ds, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right] dx dt.$$

Se indichiamo con \bar{B} la matrice trasposta di B si ottiene per la simmetria di A :

$$(I,23) \quad \int_Q (u_1 - u_2, \Lambda^i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}) dx dt = \int_Q (u_1 - u_2, A \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \int_0^1 \bar{B}(x, s, t) \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds) dx dt.$$

Consideriamo quindi il sistema:

$$(I,24) \quad A(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Lambda^i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \int_0^1 \bar{B}(x, s, t) \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds + f(x, t)$$

con le condizioni

$$(I,25) \quad \varphi(T) = 0 \text{ in } \Omega, \quad \Phi \times n = 0 \text{ in } \partial \Omega \times I$$

se il problema (I,24) - (I,25) ammette soluzione per ogni f assolutamente continua, l'equazione (I,23) è equivalente a (I,17). Si vede così che i teoremi di unicità per equazioni quasi-lineari del tipo (I,15) con condizioni iniziali e al contorno non omogenee si riconducono a dimostrare l'esistenza dei relativi problemi lineari con condizioni iniziali e al contorno nulle.

BIBLIOGRAFIA

- [1] D. GRAFFI, *Problemi non lineari nella teoria del campo elettromagnetico*, «Atti e Mem. Acc. Naz. Scien. Lett. Arti Modena», Serie VI, 9 (1967).
- [2] R. A. TOUPIN e R. S. RIVLIN, *Electro-Magneto-Optical Effects*, «Arc. Rath. Mech. Anal.», 7, 434 (1961).
- [3] G. PIGNEDOLI, *Sul teorema di unicità per le equazioni di Maxwell in un dielettrico non lineare anisotropo*, «Atti Sem. Mat. Fis. Modena», 155 (1967).
- [4] G. PETTINI, *Sul teorema di unicità nell'elettromagnetismo non lineare ereditario*, «Boll. U.M.I.», Serie IV, Anno III, n. 1, 55 (1970).
- [5] O. A. OLEINIK, *Discontinuous solutions of non-linear differential equations*, «Amer. Math. Soc. Transl.», Series II, 26, 95 (1963).
- [6] P. D. LAX, *Non linear hyperbolic systems of conservation laws, Non linear problems*, The Univ. of Wisconsin Press, p. 3, Madison 1963.
- [7] A. E. HURD, *A uniqueness theorem for weak solutions of symmetric quasi-linear Hyperbolic Systems*, «Pacif. Journ. of Math.», 29, 555 (1969).
- [8] E. D. CONWAY, *Generalized solutions of linear differential equations with discontinuous coefficients and the uniqueness question for multidimensional quasi-linear conservation laws*, «J. Math. Anal. Appl.», 18, 238 (1967).
- [9] A. I. VOL'PERT., «Mat. Sb.», 73 (115), 255 (1967).
- [10] B. D. COLEMAN e W. NOLL, *An approximation theorem for functionals, with application in continuum mechanics*, «Arch. Rational Mech. Anal.», 6, 355 (1960).
- [11] B. D. COLEMAN e W. NOLL, *Foundation of linear viscoelasticity*, «Rev. Mod. Phys.», 33, 239 (1960).
- [12] B. D. COLEMAN, *Thermodynamics of materials with memory*, «Arch. Rat. Mech. Anal.», 17, 1 (1964).
- [13] B. D. COLEMAN e V. J. MIZEL, *A general theory of dissipation in materials with memory*, «Arch. Rat. Mech. Anal.», 27, 255 (1967).
- [14] A. R. MITCHELL, *Computational Method in partial differential equations*, John Wiley e Sons, London 1969.
- [15] F. RIESZ e B. SZ-NAGY, *Functional Analysis*, New York, F. Ungar 1955.
- [16] B. D. COLEMAN e E. H. DILL, *Thermodynamic Restrictions on the Constitutive Equations of Electromagnetic Theory*. In corso di stampa, Z.A.M.P.