Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mario Fiorentini

Esempi di anelli di Cohen-Macaulay che non sono di Gorenstein

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **50** (1971), n.2, p. 94–99.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_2_94_0>

Algebra. — *Esempi di anelli di Cohen–Macaulay che non sono di Gorenstein* (*). Nota di MARIO FIORENTINI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — We give some examples of Cohen-Macaulay rings which are not Gorenstein.

INTRODUZIONE

È noto che, se A è un anello di Gorenstein, A è un anello di Cohen–Macaulay, ma, nel caso generale, non vale il viceversa. In [4] e [5], utilizzando procedimenti differenti, sono forniti esempi di anelli di Cohen–Macaulay che non sono di Gorenstein.

Sia $\mathfrak{p}$ l'ideale primo dell'anello di polinomi sopra un campo k, $A = k[x_0, \cdots, x_n, y_0, \cdots, y_n]$, $n \geq 1$, con una base minimale di generatori data dai determinanti del secondo ordine estratti dalla matrice $M = \begin{Vmatrix} x_0 \cdots x_n \\ y_0 \cdots y_n \end{Vmatrix}$.

Sappiamo (cfr. [3] e [5]), che $\mathfrak{p}$ è un ideale generato da una successione A–regolare generalizzata e che $\mathrm{prof}_A(\mathfrak{p}) = hd_A(A/\mathfrak{p}) = n$.

Siano $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p} + \sum_{0 \leq j \leq i} (y_j - x_{j+1}) A$ gli ideali omogenei di A generati dai determinanti del secondo ordine estratti dalle matrici

$$M_i = \begin{Vmatrix} x_0\, x_1 \cdots x_i & x_{i+1} \cdots x_n \\ x_1\, x_2 \cdots x_{i+1} & y_{i+1} \cdots y_n \end{Vmatrix} \qquad (0 \leq i \leq n-1).$$

Nella presente Nota dimostriamo che gli anelli $A/\mathfrak{p}_i$ sono integri, di Cohen–Macaulay, aritmeticamente normali, ma non sono di Gorenstein.

In una Nota successiva daremo esempi di anelli di Cohen–Macaulay semifattoriali che non sono di Gorenstein e forniremo alcune applicazioni geometriche.

1. – NOTAZIONI E RICHIAMI

Tutti gli anelli considerati sono commutativi, unitari e noetheriani.

Poiché la terminologia concernente le nozioni che occorreranno nel seguito non è unificata, riteniamo opportuno richiamare alcune definizioni.

Siano A un anello e M un modulo finitamente generato su A. Un elemento $x \in A$ è detto M–regolare, se l'omomorfismo $h : M \to M$, con $h(m) = xm$, è iniettivo.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.
(**) Nella seduta del 20 febbraio 1971.

Una successione $a_1, \cdots, a_m$ di elementi di A è detta M–regolare se a_1 è M–regolare e a_i è $(M/(a_1A + \cdots + a_{i-1}M))$–regolare per ogni i, $1 < i \leq n$.

Indichiamo con $ht(\mathfrak{a})$, $\mathrm{coht}(\mathfrak{a})$, $\dim(\mathfrak{a})$, rispettivamente, l'altezza, la coaltezza, la dimensione dell'ideale $\mathfrak{a}$ (cfr. [9]). Inoltre, se M è un A–modulo, indichiamo con $hd_A(M)$ la dimensione omologica di M su A.

Se $\mathfrak{a}$ è un ideale di un anello A, chiameremo profondità di $\mathfrak{a}$ in A, e la denoteremo con $\mathrm{prof}_A(\mathfrak{a})$, il massimo numero di elementi di A formanti una successione A–regolare (dove A è interpretato come modulo su A).

Se $\mathfrak{a}$ è un ideale di un anello A, si ha sempre $\mathrm{prof}_A(\mathfrak{a}) \leq hd(A/\mathfrak{a})$.

Diremo che l'ideale $\mathfrak{a}$ è perfetto se $\mathrm{prof}_A(\mathfrak{a}) = hd(A/\mathfrak{a})$. Tale definizione, posta da Rees in [8], generalizza la definizione classica di Macaulay.

Un ideale $\mathfrak{a}$ di altezza k e generato da k elementi è detto di classe principale.

Un anello A è detto di Cohen–Macaulay, se sono soddisfatte le proprietà equivalenti:

(*i*) $ht(\mathfrak{a}) = \mathrm{prof}_A(\mathfrak{a})$, per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di A;

(*ii*) ogni ideale di classe principale è puro (cioè tutti gli ideali primi associati ad $\mathfrak{a}$ hanno la stessa altezza).

Vale questa nota proprietà: in un anello di Cohen–Macaulay ogni ideale perfetto è puro (cfr. [8], Th. 3.2).

Un ideale $\mathfrak{a}$ dicesi irriducibile se non è intersezione di sopra–ideali propri.

Un ideale $\mathfrak{a}$ di un anello graduato A (in particolare di un anello di polinomi) dicesi omogeneo se $f \in \mathfrak{a}$ implica che tutte le componenti omogenee di f appartengono ad $\mathfrak{a}$.

Un anello integro è detto aritmeticamente normale se è integralmente chiuso nel suo corpo quoziente.

Un anello A si dice di Gorenstein se soddisfa alle seguenti condizioni equivalenti:

(*j*) Per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$, $A_\mathfrak{p}$ è un anello di Cohen–Macaulay in cui qualche sistema di parametri genera un ideale irriducibile.

(*jj*) Per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ ogni sistema di parametri in $A_\mathfrak{p}$ genera un ideale irriducibile.

(*jjj*) Per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$, $A_\mathfrak{m}$ è un anello di Cohen–Macaulay in cui qualche sistema di parametri genera un ideale irriducibile.

(*jv*) Per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$, ogni sistema di parametri in $A_\mathfrak{m}$ genera un ideale irriducibile.

(*v*) Ogni ideale di classe principale è puro e tutte le sue componenti primarie sono irriducibili.

Per la dimostrazione dell'equivalenza delle proprietà (*j*), (*jj*), $\cdots$, (*v*), vedi [1].

2. – Due teoremi e alcuni lemmi

Lemma 1. *Con le notazioni dell'introduzione si ha*

$$x_0 A + \mathfrak{p} = (x_0 A + y_0 A + \mathfrak{p}) \cap (x_0 A + \cdots + x_n A),$$

dove

$$x_0 A + y_0 A + \mathfrak{p} \quad \text{e} \quad x_0 A + \cdots + x_n A$$

sono ideali primi.

Dimostrazione. L'inclusione

$$x_0 A + \mathfrak{p} \subseteq (x_0 A + y_0 A + \mathfrak{p}) \cap (x_0 A + \cdots + x_n A)$$

è immediata.

Per dimostrare l'inclusione opposta, basta verificare che

$$(y_0 A) \cap (x_0 A + \cdots + x_n A) \subset x_0 A + \mathfrak{p},$$

giacché

$$(x_0 A + y_0 A + \mathfrak{p}) \cap (x_0 A + \cdots + x_n A) =$$
$$= x_0 A + \mathfrak{p} + (y_0 A) \cap (x A_0 + \cdots + x_n A).$$

Ora, poiché, per ogni $i = 1, \cdots, n$, si ha $y_0 x_i - y_i x_0 \in \mathfrak{p}$, se F è un polinomio di A del tipo $F = y_0 (x_0 F_0 + \cdots + x_n F_n)$, con $F_i \in A$, si deduce

$$F = \sum_{0 \leq i \leq n} (y_0 x_i - y_i x_0) F_i + \sum_{0 \leq i \leq n} y_i x_0 F_i \in \mathfrak{p} + x_0 A.$$

Lemma 2. *Siano Q un anello locale di dimensione d e ideale massimale* $\mathfrak{m}$, $t_1, \cdots, t_h$ *elementi di* $\mathfrak{m}$ *formanti una successione Q–regolare,* $Q' = Q/(t_1 Q + \cdots + t_h Q)$. *L'anello Q' è di Cohen–Macaulay (di Gorenstein), se e solo se Q è un anello di Cohen–Macaulay (di Gorenstein).*

Dimostrazione. Per la prima parte del Lemma, vedi [7], vol. I, pag. 326. Per la seconda parte, vedi [7], vol. II, p. 235.

Teorema 1. *L'ideale* $\mathfrak{p}_i$ *è primo e* $ht(\mathfrak{p}_i) = i + n + 1$.

Dimostrazione. Si procede per induzione rispetto a n.

(*a*) $n = 1$. Si ha $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p} + (y_0 - x_1)$ e $A/\mathfrak{p}_0 = k[x_0, x_1, y_1]/(x_0 y_1 - x_1^2)$ è un anello integro, perché $x_0 y_1 - x_1^2$ è irriducibile. Inoltre $ht(\mathfrak{p}_0) \geq 2$, perché $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_0$. In definitiva $ht(\mathfrak{p}_0) = 2$, giacché, per un noto teorema di Krull (cfr. [6], vol. I, pag. 142), $ht(\mathfrak{p}_0) \leq 2$.

(*b*) $n > 1$. Supponiamo $n > 1$ e che il teorema sia vero quando si ponga $n - 1$ in luogo di n. Posto $R = A/\mathfrak{p}$, sappiamo (cfr. [3]), che R è un anello di Cohen–Macaulay integro. Poniamo $Q = R[u_0^{-1}] = R_S$, con

$S = \{u_0, u_0^2, \cdots, u_0^n, \cdots\}$ e dove u_0 è l'immagine di x_0, mediante l'applicazione canonica $A \to R$. Abbiamo $Q = A_T/\mathfrak{p}A_T$, dove $T = \{x_0, x_0^2, \cdots, x_0^n, \cdots\}$ e vogliamo dimostrare che

$$\mathfrak{p}A_T = \sum_{1 \leq i \leq n} (y_i - x_i\, y_0/x_0)\, A_T\,.$$

Basta, a tale scopo, verificare che

$$\mathfrak{p}A_T \subset \sum_{1 \leq i \leq n} (y_i - x_i\, y_0/x_0)\, A_T\,,$$

l'inclusione opposta essendo evidente.

La richiesta relazione si deduce dalle identità

$$x_0\,(x_i\, y_j - x_j\, y_i) = x_i\,(x_0\, y_j - x_j\, y_0) + x_j\,(x_i\, y_0 - x_0\, y_i)\,,$$

cioè

$$x_i\, y_j - x_j\, y_i = x_i\,(y_j - x_j\, y_0/x_0) - x_j\,(y_i - x_i\, y_0/x_0)\,.$$

Ne segue

$$Q = A_T/\mathfrak{p}A_T = k\,[x_0, \cdots, x_n, y_0, 1/x_0] = (k\,[x_0, \cdots, x_n, y_0])_T\,,$$

$$\mathfrak{p}_i\, Q = \sum_{0 \leq j \leq i} (y_j - x_{j+1})\, Q\,, \qquad \text{perché} \quad \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p} + \sum_{0 \leq j \leq i} (y_j - x_{j+1})\, A.$$

Osserviamo che nell'anello Q abbiamo

$$y_j - x_{j+1} = x_j\, y_0/x_0 - x_{j+1}\,, \qquad \text{per} \quad j \geq 0\,,$$

quindi

$$\mathfrak{p}_i\, Q = \sum_{0 \leq j \leq i} (x_{j+1} - x_j\, y_0/x_0)\, Q\,, \qquad \text{ovvero} \quad \mathfrak{p}_i\, Q = \sum_{0 \leq j \leq i} (x_{j+1} - y_0^{j+1}/x_0^j)\, Q\,.$$

Seguono le relazioni

$$Q/\mathfrak{p}_i\, Q = (k\,[x_0, x_{i+2}, \cdots, x_n, y_0])_T\,,$$

$$\dim Q/\mathfrak{p}_i\, Q = \dim k\,[x_0, x_{i+2}, \cdots, x_n, y_0] = n - i + 1\,,$$

da cui

$$\operatorname{coht}(\mathfrak{p}_i\, Q) = n - i + 1\,,$$

quindi

$$ht\,(\mathfrak{p}_i\, Q) = \dim Q - (n - i + 1) = n + 2 - (n - i + 1) = i + 1\,,$$

giacché

$$\dim Q = \dim k\,[x_0, \cdots, x_n, y_0] = n + 2\,.$$

Scriviamo una decomposizione primaria ridotta

$$\mathfrak{p}_i\, R = (\mathfrak{p}_i\, Q \cap R) \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_h\,,$$

con $\mathfrak{q}_2, \cdots, \mathfrak{q}_h$ ideali primari tali che $S \cap \mathfrak{q}_i \neq \varnothing$ $(i = 2, \cdots, h)$.

Posto $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_i$ $(2 \leq i \leq h)$ e $\mathfrak{r} = \operatorname{Rad}(\mathfrak{q}_i)$, segue $u_0 \in \mathfrak{r}$. Se P è un elemento di Spec A (cioè dell'insieme degli ideali primi di A, munito della topologia di Zariski), tale che $\mathfrak{r} = \mathrm{P}/\mathfrak{p}$, abbiamo che $x_0 \in \mathrm{P}$, $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathrm{P}$, da cui $x_0 \mathrm{A} + \mathfrak{p}_i \subseteq \mathrm{P}$. Ora, per il lemma 1, sappiamo che $x_0 \mathrm{A} + \mathfrak{p} = (y_0 \mathrm{A} + x_0 \mathrm{A} + \mathfrak{p}) \cap (x_0 \mathrm{A} + \cdots + x_n \mathrm{A})$.

Si presentano a questo punto due possibilità:

(i) $y_0 \mathrm{A} + x_0 \mathrm{A} + \mathfrak{p} \subseteq \mathrm{P}$;

(ii) $(x_0 \mathrm{A} + \cdots + x_n \mathrm{A}) \subseteq \mathrm{P}$.

Caso (i). Siano $\mathrm{A}' = \mathrm{A}/(y_0 \mathrm{A} + x_0 \mathrm{A}) = k[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n]$, $\mathrm{P}' = \mathrm{P}/(x_0 \mathrm{A} + y_0 \mathrm{A})$, $\mathfrak{p}'_i = (\mathfrak{p}_i + x_0 \mathrm{A} + y_0 \mathrm{A})/(x_0 \mathrm{A} + y_0 \mathrm{A})$. Osserviamo che $\mathfrak{p}_i = \overset{*}{\mathfrak{p}}_{i-1} + x_1 \mathrm{A}'$, dove $\overset{*}{\mathfrak{p}}_{i-1} = \mathfrak{p}^* + \sum_{1 \leq j \leq i} (y_j - x_{j+1}) \mathrm{A}'$ mentre $\mathfrak{p}^*$ è l'ideale generato dai minori del secondo ordine estratti dalla matrice $\begin{Vmatrix} x_1 \cdots x_n \\ y_1 \cdots y_n \end{Vmatrix}$. Per l'ipotesi induttiva $\overset{*}{\mathfrak{p}}_{i-1}$ è primo e $ht(\overset{*}{\mathfrak{p}}_{i-1}) = n + i - 1$. D'altro canto, $x_1 \notin \overset{*}{\mathfrak{p}}_{i-1}$ e quindi ogni divisore primo di $\overset{*}{\mathfrak{p}}_{i-1} + x_1 \mathrm{A}'$ ha altezza almeno $n + i$. Da $\mathrm{P}' \supset \overset{*}{\mathfrak{p}}_{i-1} + x_1 \mathrm{A}'$ segue $ht(\mathrm{P}') \geq n + i$, e, quindi, $ht(\mathrm{P}) = ht(\mathrm{P}') + 2 \geq n + i + 2$, ciò che implica $ht(\mathfrak{r}) = ht(\mathrm{P}) - n \geq i + 2$, e, in definitiva, nel caso (i), si ha $ht(\mathfrak{r}) \geq i + 2$.

Caso (ii). Siano

$$\mathrm{A}' = \mathrm{A}/(x_0 \mathrm{A} + \cdots + x_n \mathrm{A}) \quad , \quad \mathrm{P}' = \mathrm{P}/(x_0 \mathrm{A} + \cdots + x_n \mathrm{A}),$$

$$\mathfrak{p}'_i = (\mathfrak{p}_i + (x_0 \mathrm{A} + \cdots + x_n \mathrm{A}))/(x_0 \mathrm{A} + \cdots + x_n \mathrm{A}).$$

Abbiamo $\mathrm{A}' = k[y_0, \cdots, y_n]$, $\mathfrak{p}'_i = (y_0 \mathrm{A}' + \cdots + y_i \mathrm{A}')$, segue $ht(\mathfrak{p}'_i) = i + 1$.

D'altro canto $\mathrm{P}' \supset \mathfrak{p}_i$, da cui $ht(\mathrm{P}') \geq i + 1$, $ht(\mathrm{P}) = ht(\mathrm{P}') + n + 1 \geq n + i + 2$. Poiché, infine, $ht(\mathfrak{r}) = ht(\mathrm{P}) - n \geq i + 2$, anche nel caso (ii), si ha $ht(\mathfrak{r}) \geq i + 2$.

In definitiva abbiamo dimostrato che ogni ideale primo associato a $\mathfrak{p}_i \mathrm{R}$ ha altezza uguale o maggiore a $i + 1$, quindi $ht(\mathfrak{p}_i \mathrm{R}) = i + 1$, cioè $\mathfrak{p}_i \mathrm{R}$ è un ideale di classe principale. Ma R è un anello di Cohen–Macaulay e poiché $ht(\mathfrak{q}_j) \geq i + 2$, segue che $\mathfrak{p}_i \mathrm{R}$ non può avere componenti primarie oltre a $\mathfrak{p}_i \mathrm{Q} \cap \mathrm{R}$, vale a dire $\mathfrak{p}_i \mathrm{R} = \mathfrak{p}_i \mathrm{Q} \cap \mathrm{R}$ e, quindi, $\mathfrak{p}_i \mathrm{R}$ è un ideale primo di altezza $n + i + 1$.

COROLLARIO 1. *Siano* $u_i \equiv x_i \pmod{\mathfrak{p}}$, $v_i \equiv y_i \pmod{\mathfrak{p}}$ *e* $w_j = v_j - u_{j+1}$, $(0 \leq j \leq n - 1)$. *Gli elementi di* $\mathrm{R}, w_0, \cdots, w_{n-1}$ *formano una successione* R*–regolare.*

Dimostrazione. Segue subito dalle relazioni $\mathfrak{p}_i \mathrm{R} = \mathfrak{p}_i/\mathfrak{p} = (w_0 \mathrm{R} + \cdots + w_i \mathrm{R})$, tenendo conto del fatto che gli ideali $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{p}_i$ sono primi.

TEOREMA 2. *Gli anelli* $\mathrm{R}_i = \mathrm{A}/\mathfrak{p}_i$ *sono di Cohen–Macaulay, ma non sono di Gorenstein.*

Dimostrazione. L'anello R è di Cohen–Macaulay (cfr. [3]). Per dimostrare che R non è un anello di Gorenstein, basta verificare che l'anello locale $\mathrm{O} = \mathrm{R}_{(x_0, \cdots, x_n, y_0, \cdots, y_n)}$ non è di Gorenstein e ciò discende come conseguenza dal fatto che il completamento di O, cioè l'anello $\overline{\mathrm{O}} = k[[x_0, \cdots, x_n, y_0, \cdots, y_n]]/\mathfrak{p}$

non è di Gorenstein. Per completare la dimostrazione del teorema basta ora scrivere $R_i = R/(w_0 R + \cdots + w_i R)$ e applicare il lemma 2.

COROLLARIO 2. *Gli anelli* $R_i = A/\mathfrak{p}_i$ *sono aritmeticamente normali.*

Gli anelli R_i sono di Cohen–Macaulay e inoltre sono regolari, cioè i localizzati di R_i in un ideale primo qualsiasi, diverso dall'ideale (o), sono regolari. Il risultato segue da un noto criterio di normalità di Serre.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BASS, *On the ubiquity of Gorenstein Rings*, «Math. Zeitschr.», *82* (1963).

[2] E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*. Ed. Principato, Messina 1923.

[3] J. A. EAGON and D. G. NORTHCOTT, *Ideals defined by matrices...*, « Proc. Roy. Soc. of London », *269* (1962).

[4] J. A. EAGON, *Examples of Cohen–Macaulay rings which are not Gorenstein*, «Math. Zeitschr. », *109* (1969).

[5] M. FIORENTINI, *Una speciale famiglia di ideali di classe principale generalizzata*, « Rend. di Matematica », (3), *3*, Serie VI, Roma 1970.

[6] W. GRÖBNER, *Algebraische Geometrie*, B. I., Hochschultaschenbucher, Mannheim (1970).

[7] N. RADU, *Inele locale*, Bucarest 1970.

[8] D. REES, *The grade of an ideal or module*, « Proc. Camb. Ph. Soc. », *53* (1957).

[9] J. P. SERRE, *Algèbre locale et multiplicités*, Springer 1965.