
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIORGIO VERGARA CAFFARELLI

**Regolarità di un problema di disequazioni
variazionali relativo a due membrane**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 50 (1971), n.6, p. 659–662.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_6_659_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Regolarità di un problema di disequazioni variazionali relativo a due membrane.* Nota di GIORGIO VERGARA CAFFARELLI, presentata (*) dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

SUMMARY. — The regularity of the solutions of a variational problem concerning two membranes pushing against each other is obtained by reducing the problem to one involving a single rigid constraint.

1. Scopo di questa Nota è rispondere alla seguente questione: determinare la posizione di equilibrio di due membrane fissate rispettivamente ai bordi e spinte l'una contro l'altra ⁽¹⁾. Questo problema rientra nello studio dell'esistenza e della regolarità delle soluzioni di una disequazione variazionale (cfr. [2], [3], [4]) relativa ad operatori vettoriali ellittici e viene qui esaminato nel caso di un operatore le cui componenti abbiano parte dominante uguale.

Nel seguito indicheremo con Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e con $L^p(\Omega)$ $1 \leq p \leq \infty$, $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^{2,s}(\Omega)$ $1 \leq s \leq \infty$ gli usuali spazi funzionali di Sobolev; inoltre se $\varphi \in H^1(\Omega)$ indicheremo con $H_\varphi^1(\Omega)$ la varietà

$$H_\varphi^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u - \varphi \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Ricordiamo poi che se $u, v \in H^1(\Omega)$ la diseuguaglianza $u \geq v$ resta definita in modo naturale tenendo conto che $H^1(\Omega)$ è il completamento di $C^1(\bar{\Omega})$ (cfr. [4]).

2. Consideriamo gli operatori:

$$(1) \quad \begin{aligned} A(u) &= -(a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + b_i(x) u_{x_i} + c(x) u \\ B(v) &= -(a_{ij}(x) v_{x_i})_{x_j} + d_i(x) v_{x_i} + e(x) v \end{aligned}$$

le cui parti principali indicheremo con $L(u)$. In (1) e nel seguito le somme saranno sottintese. Se $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $b_i, d_i \in L^n(\Omega)$, $(i, j = 1, \dots, n)$, $c, e \in L^{n/2}(\Omega)$ l'operatore lineare (A, B) applica $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ nel suo duale ed è ellittico se:

$$(2) \quad a_{ij}(x) \mu_i \mu_j \geq c_1 |\mu|^2 \quad \text{per } \mu \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega, c_1 > 0$$

coercitivo se:

$$(3) \quad \langle A(u), u \rangle \geq c_2 \|u\|_{H_0^1}^2, c_2 > 0, \quad \langle B(v), v \rangle \geq c_3 \|v\|_{H_0^1}^2, c_3 > 0$$

(*) Nella seduta del 18 giugno 1971.

(1) Tale argomento mi è stato indicato dal prof. G. Stampacchia che ringrazio del suggerimento e dei consigli datemi nella redazione di questa Nota.

essendo, al solito:

$$\langle A(u), \xi \rangle = \int_{\Omega} [a_{ij} u_{x_i} \xi_{x_j} + (b_i u_{x_i} + cu) \xi] dx$$

$$\langle B(v), \eta \rangle = \int_{\Omega} [a_{ij} v_{x_i} \eta_{x_j} + (d_i v_{x_i} + ev) \eta] dx.$$

Come è noto la (2) implica la (3) se la misura di Ω oppure le norme $\|b_i\|_{L^n}$, $\|d_i\|_{L^n}$ ($i = 1, \dots, n$) $\|c\|_{L^{n/2}}$ $\|e\|_{L^{n/2}}$ risultano sufficientemente piccole.

Siano $\rho(x)$, $\sigma(x)$ funzioni di $H^1(\Omega)$ tali che $\rho \geq \sigma$ su $\partial\Omega$ nel senso di H^1 . Indicato con $\bar{K}$ il convesso

$$\bar{K} = \{(\bar{u}, \bar{v}) \in H_0^1 \times H_0^1 : \bar{u} \geq \bar{v} \text{ in } \Omega\}$$

si consideri il problema di disequazioni variazionali

PROBLEMA 1. *Determinare $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{K}$ tale che:*

$$\langle A(\bar{u}) - \bar{f}, \bar{\xi} - \bar{u} \rangle + \langle B(\bar{v}) - \bar{g}, \bar{\eta} - \bar{v} \rangle \geq 0 \quad \text{per } (\bar{\xi}, \bar{\eta}) \in \bar{K}.$$

ove $\bar{f}, \bar{g} \in L^2(\Omega)$.

Osserviamo che tale problema ammette una e una sola soluzione se sono soddisfatte le (2), (3). Infatti posto:

$$u = \bar{u} - \rho \quad \xi = \bar{\xi} - \rho \quad f = \bar{f} - A(\rho)$$

$$v = \bar{v} - \sigma \quad \eta = \bar{\eta} - \sigma \quad g = \bar{g} - B(\sigma)$$

$$K = \{(u, v) \in H_0^1 \times H_0^1 : u - v \geq \sigma - \rho \text{ in } \Omega\}$$

il problema 1 è equivalente al

PROBLEMA 2. *Determinare $(u, v) \in K$ tale che:*

$$(4) \quad \langle A(u) - f, \xi - u \rangle + \langle B(v) - g, \eta - v \rangle \geq 0 \quad \text{per } (\xi, \eta) \in K$$

e questi per la coercitività di (A, B) in $H_0^1 \times H_0^1$ ammette una ed una sola soluzione (cfr. [4]).

Al fine di studiare le proprietà della soluzione (u, v) del Problema 1 ricordiamo due risultati di regolarità.

TEOREMA 1 (cfr. [1]). *Siano $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ soddisfacenti alla condizione di ellitticità (2) e sia $\partial\Omega \in C^2$. Allora la soluzione del problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} L(u) \equiv -(a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} = F & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

appartiene ad $H^{2,s}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ se $F \in L^s(\Omega)$ con $1 < s < \infty$. Inoltre esiste una costante $C = C(\Omega, s)$ tale che

$$\|u\|_{H^{2,s}} \leq C \|F\|_{L^s}.$$

Questo teorema è stato esteso alle disequazioni variazionali. Precisamente:

TEOREMA 2 (cfr. [2]). *Se alle ipotesi del teorema precedente si aggiunge $\psi \in H^1(\Omega)$, $L(\psi) \in L^s(\Omega)$, $\psi \leq 0$ su $\partial\Omega$, detto K_ψ il convesso*

$$K_\psi = \{\beta \in H_0^1(\Omega) : \beta \geq \psi \text{ in } \Omega\}$$

la soluzione z del problema variazionale:

$$\left\{ \begin{array}{l} z \in K_\psi \\ \int_{\Omega} a_{ij}(x) z_{x_i} (\beta - z)_{x_j} dx \geq \int_{\Omega} F(\beta - z) dx \end{array} \right. \quad \text{per } \beta \in K_\psi$$

appartiene ad $H^{2,s}(\Omega)$. Inoltre esiste una costante $C = C(\Omega, s)$ tale che

$$\|u\|_{H^{2,s}} \leq C(\|F\|_{L^s} + \|L(\psi)\|_{L^s}).$$

Torniamo ora alla nostra questione.

LEMMA 1. *Il Problema 2 equivale a trovare $(u, v) \in K$ tale che:*

- (5) $\langle A(u) + B(v), \alpha \rangle = \langle f + g, \alpha \rangle$ per $\alpha \in H_0^1$
 (6) $\langle A(u) - B(v), \beta - (u - v) \rangle \geq \langle f - g, \beta - (u - v) \rangle$ per $\beta \in H_0^1, \beta \geq \sigma - \rho$.

Dimostrazione. La (5) si ottiene dalla (4) prendendo $\xi = u + \alpha$, $\eta = v + \alpha$ con $\alpha \in H_0^1, \alpha \geq 0$. Per avere la (6) basta sommare le disequazioni che si ottengono per $\xi = v + \beta$, $\eta = v$; $\xi = u$, $\eta = u - \beta$ con $\beta \in H_0^1, \beta \geq \sigma - \rho$. Viceversa la (4) si ottiene sommando le (5) (6) scritte per $\alpha = \frac{1}{2}[(\xi + \eta) - (u + v)]$, $\beta = \frac{1}{2}[(\xi - \eta) + (u - v)] \geq \sigma - \rho$ se $(\xi, \eta) \in K$.

Dimostriamo ora il

TEOREMA 3. *Se $a_{ij}(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, $b_i(x)$, $d_i(x)$, $c(x)$, $e(x)$, $f(x)$, $g(x) \in L^p(\Omega)$ con $p > n$, $\rho(x), \sigma(x) \in H^{2,p}(\Omega)$, $\rho \geq \sigma$ su $\partial\Omega$ e $\partial\Omega \in C^2$, la soluzione $(\bar{u}, \bar{v})$ del Problema 1 appartiene a $H^{2,p} \times H^{2,p}$ e quindi ha derivate prime hölderiane di esponente $\lambda = 1 - n/p$.*

Dimostrazione. Posto

$$w = u + v \quad z = u - v$$

$$M(u) = b_i u_{x_i} + cu + A(\rho) - \bar{f}, \quad N(v) = d_i v_{x_i} + ev + B(\sigma) - \bar{g}$$

per il lemma precedente il Problema 2 può scriversi nella forma: trovare $w \in H_0^1, z \in K_{\sigma-\rho} = \{\beta \in H_0^1(\Omega) : \beta \geq \sigma - \rho \text{ in } \Omega\}$ tali che

- (7) $\langle L(w), \alpha \rangle = \langle -M(u) - N(v), \alpha \rangle$ per $\alpha \in H_0^1$
 (8) $\langle L(z), \beta - z \rangle \geq \langle -M(u) + N(v), \beta - z \rangle$ per $\beta \in K_{\sigma-\rho}$.

Interpretando (7) e (8) come espressioni nelle incognite w, z con (u, v) soluzione nota del Problema 2, l'ellitticità dell'operatore L garantisce che $w = u + v$, $z = u - v$. Ma $u, v \in H_0^1$, ne segue $M(u), N(v) \in L^{s_1}$ con $\frac{1}{s_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$. Dai Teoremi 1 e 2 si ha allora $w, z \in H^{2, s_1}$ da cui $u, v \in H^{1, s_1^*}$ con $\frac{1}{s_1^*} = \frac{1}{s_1} - \frac{1}{n}$ e quindi $M(u), N(v) \in L^{s_2}$ con $\frac{1}{s_2} = \frac{1}{s_1} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right)$. Ripetendo eventualmente più volte la stessa argomentazione si dimostra che $w, z \in H^{2, p}$ cioè $\bar{u} = u + \rho, \bar{v} = v + \sigma \in H^{2, p}$.

Come conseguenza del Lemma 1 si trae anche il seguente risultato fisicamente evidente:

COROLLARIO 1. *Se il Problema 1 è simmetrico ovvero se $A = B$, $\bar{g} = -\bar{f}$, $\sigma = -\rho$, $\rho \geq 0$ su $\partial\Omega$, allora:*

$$\{x \in \Omega : \bar{u}(x) = \bar{v}(x)\} = \{x \in \Omega : \bar{u}(x) = 0\} = \{x \in \Omega : \bar{v}(x) = 0\}$$

Dimostrazione. Dalla (5) si trae $w = u + v = 0$, per cui $\bar{u} = u + \rho = -\bar{v} = -(v + \sigma)$. Ne segue che l'insieme di contatto delle due membrane coincide con l'insieme in cui esse si appiattiscono sul piano di simmetria.

BIBLIOGRAFIA

- [1] AGMON S., DOUGLIS A. e NIRENBERG L., *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary condition, I*, «Comm. Pure Appl. Math.», 12, 623-726 (1959).
- [2] BREZIS H. e STAMPACCHIA G., *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques*, «Bull. Soc. Math. France», 96, 153-180 (1968).
- [3] LEWY H. e STAMPACCHIA G., *On the regularity of the solution of a variational inequality*, «Comm. Pure Appl. Math.», 22, 153-188 (1969).
- [4] LIONS J. L. e STAMPACCHIA G., *Variational inequalities*, «Comm. Pure Appl. Math.», 20, 493-519 (1967).