Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Margherita Galbiati, Alberto Tognoli

Alcune proprietà delle varietà algebriche reali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **51** (1971), n.1-2, p. 41–43.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_1-2_41_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1971.

Geometria. — *Alcune proprietà delle varietà algebriche reali.* Nota (*) di MARGHERITA GALBIATI e ALBERTO TOGNOLI, presentata (**) dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — This work lists some general results about the study of real algebraic varieties (in the sense of Serre). The proofs will appear soon.

Lo studio delle varietà algebriche reali è stato piuttosto trascurato dalla scuola dei geometri algebrici «classici» e la teoria degli schemi è stata quasi sempre applicata alla geometria algebrica complessa.

Non ci è parso dunque inutile studiare le varietà algebriche reali secondo la definizione di Serre (in effetti Serre nel suo celebre lavoro F.A.C. si pone nell'ipotesi che il campo di base sia algebricamente chiuso e quindi, almeno esplicitamente, non tratta la geometria algebrica su $\mathbf{R}$).

Scopo del lavoro, di cui qui diamo un sunto, è stabilire alcune proprietà di base delle varietà algebriche reali, proprietà che gli Autori sperano possano servire ad ulteriori indagini su questo argomento (in particolare si pensa di arrivare, anche nel caso reale, ad uno spazio dei cicli algebrici analogo a quello definito nel caso complesso da Andreotti e Norguet. Vedi [1] e [2]).

Su $\mathbf{R}^n$ considereremo, salvo avviso contrario, la topologia di Zariski.

Sia $\underline{\mathcal{R}}_{\mathbf{R}^n}$ il fascio dei germi delle funzioni regolari $\Big($una funzione f si dice regolare in $x \in \mathbf{R}^n$ se, su un intorno di x, si ha $f = \dfrac{p}{q}$ con p , q elementi di $\mathbf{R}[x_1 \cdots x_n]$ e $q(x) \neq 0\Big)$.

Dicesi varietà affine di $\mathbf{R}^n$ un chiuso (di Zariski) V di $\mathbf{R}^n$ con il fascio $\underline{\mathcal{R}}_V$ dei germi di funzioni di V in $\mathbf{R}$, che, localmente, sono restrizioni di funzioni regolari di $\mathbf{R}^n$.

Dicesi prevarietà algebrica reale uno spazio con fascio di anelli locali $(X , \underline{\mathcal{R}}_X)$ che localmente sia isomorfo (come spazio con fascio di anelli) ad una varietà affine e che sia ricopribile con un numero finito di carte affini.

Si definisce, nel modo solito, il prodotto di due prevarietà algebriche reali e si chiama varietà algebrica reale ogni prevarietà algebrica reale $(X , \underline{\mathcal{R}}_X)$ la cui diagonale Δ_X sia un chiuso di $X \times X$.

Diremo complessificazione di una varietà affine reale $(V , \underline{\mathcal{R}}_V)$ di $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{C}^n$, la più piccola varietà algebrica complessa $(\tilde{V}, \underline{\mathcal{R}}_{\tilde{V}})$ contenente V.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del GNSAGA del CNR.

(**) Pervenuta all'Accademia il 10 agosto 1971.

Diremo complessificazione della prevarietà algebrica reale $(X, \underline{\mathcal{R}}_X)$ ogni prevarietà algebrica complessa $(\tilde{X}, \underline{\mathcal{R}}_{\tilde{X}})$ tale che:

i) contiene X come sottovarietà algebrica reale;

ii) per ogni $x \in X$ esiste un intorno affine U_x di x in X ed un intorno $\tilde{U}_x$ di x in $\tilde{X}$ tale che $\tilde{U}_x$ sia realizzabile come complessificazione di U_x.

Analogamente a quanto accade nel caso analitico si ha il:

TEOREMA. *Sia* $(X, \underline{\mathcal{R}}_X)$ *una prevarietà algebrica reale; esiste allora una complessificata* $(\tilde{X}, \underline{\mathcal{R}}_{\tilde{X}})$ *di* X *su cui esiste un'applicazione antiregolare involutoria* $\sigma : \tilde{X} \to \tilde{X}$ *tale che*: $X = \{x \in \tilde{X} \mid \sigma(x) = x\}$.

Date inoltre due prevarietà algebriche reali $(X, \underline{\mathcal{R}}_X)$, $(Y, \underline{\mathcal{R}}_Y)$, *due loro complessificazioni* $(\tilde{X}, \underline{\mathcal{R}}_{\tilde{X}})$, $(\tilde{Y}, \underline{\mathcal{R}}_{\tilde{Y}})$ *ed un morfismo* $f : X \to Y$, *allora esiste un morfismo* $\tilde{f} : \tilde{U}_X \to \tilde{Y}$ *che estende* f *ad un intorno* (*di Zariski*) *di* X *in* $\tilde{X}$.

(Dunque la complessificata è unica attorno ad X).

Se X *è una varietà si può supporre che* $\tilde{X}$ *sia una varietà.*

Sia $(V, \underline{\mathcal{R}}_V)$ una varietà algebrica reale affine, $\mathcal{R}_V = \Gamma_V(\underline{\mathcal{R}}_V)$ l'anello delle sezioni di $\underline{\mathcal{R}}_V$, $\operatorname{spec} \mathcal{R}_V$ = insieme degli ideali primi di $\mathcal{R}_V$.

Sia poi $(\operatorname{spec} \mathcal{R}_V, \tilde{\underline{\mathcal{R}}}_V)$ lo schema affine associato all'anello $\mathcal{R}_V$.

Vale il

LEMMA. *Gli ideali massimali di* $\mathcal{R}_V$ *corrispondono biunivocamente ai punti di* V (*nel seguito identificheremo* V *con il sottospazio di* spec $\mathcal{R}_V$ *formato dai punti chiusi*).

Il fascio $\underline{\mathcal{R}}_V$ *si può identificare con* $\tilde{\underline{\mathcal{R}}}_{V|V}$.

Si hanno dunque due potenti mezzi per lo studio di una varietà algebrica reale: la complessificazione e lo studio dello schema associato alla varietà (lo schema che si ottiene incollando gli schemi affini associati ad un ricoprimento affine).

Gli Autori hanno l'impressione che convenga usare ora l'uno ora l'altro strumento, a seconda della natura dei problemi.

Vogliamo infine dare una lista di risultati che si sono ottenuti in questa prima indagine:

a) data una prevarietà algebrica reale $(X, \underline{\mathcal{R}}_X)$ il fascio $\underline{\mathcal{R}}_X$ è un fascio coerente di $\underline{\mathcal{R}}_X$ moduli (contrariamente a quanto accade nel caso analitico);

b) per le varietà affini reali vale l'analogo del Teorema A;

c) per le varietà affini reali non vale l'analogo del Teorema B (pur valendo ovviamente il Teorema B per lo schema affine associato);

d) ogni aperto di una varietà affine reale è una varietà affine reale;

e) lo spazio proiettivo reale con la struttura naturale di varietà algebrica è una varietà affine reale (e quindi tutte le varietà algebriche proiettive sono affini);

f) lo spazio proiettivo complesso, con la struttura reale soggiacente, è una varietà affine (e quindi tutte le varietà proiettive complesse con la struttura reale indotta sono affini);

g) date due varietà algebriche reali irriducibili $(\mathrm{V}, \underline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{V}})$, $(\mathrm{W}, \underline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{W}})$ e due loro complessificate irriducibili $(\tilde{\mathrm{V}}, \underline{\mathfrak{R}}_{\tilde{\mathrm{V}}})$, $(\tilde{\mathrm{W}}, \underline{\mathfrak{R}}_{\tilde{\mathrm{W}}})$ se V è isomorfa a W allora $\tilde{\mathrm{V}}$ è birazionalmente equivalente a $\tilde{\mathrm{W}}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ANDREOTTI e F. NORGUET, *Problème de Levi et convexité holomorphe pour les classes de cohomologie.* « Annali Sc. Norm. Sup. Pisa », s. 3, *20*, 197–241 (1966).

[2] A. ANDREOTTI e F. NORGUET, *La convexité holomorphe dans l'éspace analytique des cycles d'une variété algébrique,* « Annali Sc. Norm. Sup. Pisa », s. 3, *21*, 31–82 (1967).

[3] J. P. SERRE, *Faisceaux algébriques cohérents,* « Annals of Math. », *61*, 197–278 (1955).