Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Sul problema di Cauchy per una disequazione parabolica con convesso dipendente dal tempo e dato iniziale non nullo. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **51** (1971), n.1-2, p. 5–8.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_1-2_5_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1971.

Analisi matematica. — *Sul problema di Cauchy per una disequazione parabolica con convesso dipendente dal tempo e dato iniziale non nullo* (*). Nota I (**) di MARCO BIROLI, presentata dal Corrisp. L. AMERIO.

RÉSUMÉ. — On énonce un résultat d'existance pour la solution du problème de Cauchy pour un'inéquation parabolique linéaire sur un convexe dependant du temp avec un donné initial non nul.

§ 1. NOTAZIONI ED ENUNCIATI

Sia V(W) uno spazio di Banach reale, riflessivo, separabile e localmente uniformemente convesso, [2], di norma $\| \ \|$ $(\| \ \|_W)$; sia $V^*(W^*)$ il suo duale, $\langle \, , \rangle$ $(\langle \, , \rangle_W)$ l'accoppiamento di dualità entro V(W) e $V^*(W^*)$ e $\| \ \|^*$ $(\| \ \|_W^*)$ la norma duale su $V^*(W^*)$.

Sia H uno spazio di Hilbert identificato con il suo duale per il prodotto scalare $(\, ,)$ e $| \ |$ la norma indotta su H dal prodotto scalare $(\, ,)$.

Siano V, W identificati con dei sottospazi densi di H, $V \hookrightarrow W \hookrightarrow H$ e la iniezione di V in H sia compatta.

Ricordiamo la definizione di mappa di dualità su W:

DEFINIZIONE 1. – *Sia* $v \in W$; *esiste uno ed un solo* $v^* \in W^*$ *tale che*

$$\| v^* \|_W^* = \| v \|_W \qquad \langle v^*, v \rangle_W = \| v \|_W^2$$

La mappa $J : v \to v^*$ *si dice mappa di dualità.*

Consideriamo ora una funzione $\mathbf{K}(t)$ definita sull'intervallo $[0, T]$ ed avente come valori degli insiemi chiusi e convessi di W.

DEFINIZIONE 2. – *Si dice che la funzione* $\mathbf{K}(t)$ *è integrabile, se,* $\forall v \in W$, $P_{\mathbf{K}(t)} v$, *ove* $P_{\mathbf{K}(t)}$ *indica l'operatore di proiezione su* $\mathbf{K}(t)$ *in* W, *è integrabile.*

Ricordiamo che Mosco, [4], ha dato la definizione di convergenza di una successione di insiemi chiusi e convessi in uno spazio di Banach; tale definizione viene utilizzata nel seguente criterio di integrabilità per la funzione $\mathbf{K}(t)$:

TEOREMA 1. – *Supponiamo che esista una successione* $\{\mathbf{K}_n(t)\}$ *tale che, per ogni* n, $\mathbf{K}_n(t)$ *sia costante su* $B_j \subset [0, T]$ $j = 1, \cdots, m$ *ove i* B_j *sono insiemi misurabili con* $m\left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right) = T$ $\quad m(B_i \cap B_j) = 0 \quad i \neq j$, *e*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{K}_n(t) = \mathbf{K}(t) \quad \text{q.o.} \quad su \quad [0, T].$$

Supponiamo che $0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{K}_n(t) \cap \mathbf{K}(t)$ *in* $[0, T]$; *la funzione* $\mathbf{K}(t)$ *è allora integrabile.*

(*) Istituto di Matematica del Politecnico di Milano; lavoro eseguito usufruendo di una borsa di studio del C.N.R. presso l'Università di Parigi.

(**) Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 1971.

Ricordiamo ora un teorema dimostrato da H. Brézis [1]:

TEOREMA 2. – *Sia* $\mathcal{V}$ *uno spazio di Banach riflessivo,* $\mathcal{V}^*$ *il suo duale,* $\langle\, ,\rangle$ *la dualità entro* $\mathcal{V}$ *e* $\mathcal{V}^*$.

Sia $L: D(L) \to \mathcal{V}^*$, $D(L) \subset \mathcal{V}$, *un operatore massimale monotono,* [1].

Sia $\mathcal{K}$ *un convesso chiuso di* $\mathcal{V}$ *e* $\mathcal{A}$ *un operatore pseudomonotono,* [1], *coercivo e limitato di* $\mathcal{K}$ *in* $\mathcal{V}^*$.

Esiste allora, $\forall f \in \mathcal{V}^*$, $u \in \mathcal{K}$ *tale che* $\langle Lv + \mathcal{A}u - f, v - u\rangle \geq 0$ $\forall v \in D(L) \cap \mathcal{K}$.

Sia ora $A(t)$, $t \in [0, T]$, una famiglia limitata di operatori di $\mathfrak{L}(V,V^*)$; supponiamo che $t \to \langle A(t)\, u, v\rangle$ sia misurabile su $[0, T]$ $\forall u, v \in V$ e che $\langle A(t)\, u, u\rangle \geq \alpha \| u \|^2$ $\alpha > 0$, $\forall u \in V$ q.o. in $[0, T]$.

Sia infine $f(t) \in \mathfrak{L}^2(0, T; V^*)$ e $\mathbf{K}(t)$ una funzione definita su $[0, T]$, avente come valori degli insiemi chiusi e convessi di W, integrabile (nel senso della Definizione 1).

In base al Teorema 1 possiamo asserire che il problema

$$(1,1) \qquad \begin{gathered} \int_0^T \langle v'(t) + A(t)\, u(t) - f(t), v(t) - u(t)\rangle \, dt \geq 0 \\ \forall v(t) \in \mathfrak{L}^2(0, T; V) \quad \text{con} \quad v'(t) \in \mathfrak{L}^2(0, T; H) \\ v(0) = 0 \quad \text{e} \quad v(t) \in \mathbf{K}(t) \quad \text{q.o. in} \quad [0, T] \\ u(t) \in \mathfrak{L}^2(0, T; V), \quad u(t) \in \mathbf{K}(t) \quad \text{q.o. in} \quad [0, T] \end{gathered}$$

ha una soluzione $u(t)$.

Notiamo che (1,1) può intendersi come formulazione debole del problema di Cauchy con dato iniziale nullo per una disequazione parabolica lineare con convesso dipendente dal tempo.

La formulazione (1,1) non permette tuttavia di dare un significato al valore iniziale di $u(t)$ nel punto $t = 0$.

Lo scopo di questo lavoro è ottenere un risultato di esistenza per una formulazione più forte di (1,1) che permetta di dare un significato al valore iniziale di $u(t)$.

TEOREMA 3. – *Sia* $u_0 \in \mathbf{K}(\delta)$ *per* $0 \leq \delta < \delta_0$, $0 \in \mathbf{K}(t)$ $t \in [0, T]$. *Consideriamo il problema*

$$(1,2) \qquad \int_0^s \langle v'(t) + A(t)\, u(t) - f(t), v(t) - u(t)\rangle \, dt \geq \frac{1}{2} \{ | v(s) - u(s) |^2 - | v(0) - u_0 |^2 \}$$

per $s \in [0,T] - \Delta$ *ove* $\Delta \subset [0, T]$ *non dipende da* $v(t)$ *e* $m(\Delta) = 0$.
$\forall v(t) \in \mathfrak{L}^2(0, T; V)$ *con* $v'(t) \in \mathfrak{L}^2(0, T; H)$ $v(t) \in \mathbf{K}(t)$ *q.o.*
$u(t) \in \mathfrak{L}^2(0, T; V)$ $\lim_{t \to 0+} u(t) = u_0$ *in* H.

Il problema (1,2) *ha una soluzione* $u(t)$; *se poi* $\mathbf{K}(t_1) \subset \mathbf{K}(t_2)$ *per* $t_1 \leq t_2$ $u(t) \in C(0, T; H)$ *ed è l'unica soluzione di* (1,2).

Nel § 2 si dimostra il Teorema 1, nel § 3 si dimostra il Teorema 3, e nel § 4, si dà un esempio di applicazione del Teorema 3.

§ 2. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1

Consideriamo un convesso $\mathbf{K}$, $0 \in \mathbf{K}$, di W e ricordiamo, [3] pag. 370, che la proiezione di $u \in W$ su $\mathbf{K}$ è caratterizzata dalla seguente disequazione:

$$(2,1) \qquad \begin{cases} \langle J(u-w), k-w\rangle_W \leq 0 & \forall k \in \mathbf{K} \\ w \in \mathbf{K}. \end{cases}$$

Dimostriamo che $\| w \|_W \leq 2 \| u \|_W$; da (2,1) si ha

$$\langle J(u-w), -w\rangle_W \leq 0,$$

da cui

$$\langle J(u-w), u-w\rangle_W \leq \langle J(u-w), u\rangle_W$$

da cui

$$\| u-w \|_W^2 \leq \| u-w \|_W \, \| u \|_W$$

$$(2,2) \qquad \| u-w \|_W \leq \| u \|_W \Rightarrow \| w \|_W \leq 2 \| u \|_W.$$

Dimostriamo ora che w dipende con continuità dal vettore u e dal convesso $\mathbf{K}$; da ciò segue la tesi del Teorema 1 e pure che

$$\beta(t)\, u = J(u - P_{\mathbf{K}(t)}\, u)$$

è continua in u per ogni t da W forte in W debole, [2] pag. 228.

Consideriamo una successione di insiemi chiusi e convessi di W, $\{\mathbf{K}_n\}$ e una successione $\{u_n\}$ in W, tali che

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{K}_n = \mathbf{K} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = u \quad \text{in } W.$$

Consideriamo la disequazione

$$(2,3) \qquad \begin{cases} \langle J(u_n-w), k_n-w\rangle_W \leq 0 & \forall k_n \in \mathbf{K}_n \\ w \in \mathbf{K}_n. \end{cases}$$

La disequazione (2,3) ammette una unica soluzione $\{w_n\}$, [3] pag. 370. Procedendo come nella parte precedente si ha

$$\| w_n \|_W \leq 2 \| u_n \|_W \leq \text{Cst.}$$

$$\| J(u_n - w_n) \|_W^* = \| u_n - w_n \|_W \leq \| u_n \|_W \leq \text{Cst.}$$

Possiamo quindi affermare che esiste una sottosuccessione di $\{w_n\}$, che, per semplicità, indichiamo ancora con $\{w_n\}$, tale che

$$(2,4) \qquad \lim_{n\to+\infty}{}^{*} w_n = w \in \mathbf{K} \quad \text{in } W$$

$$(2,5) \qquad \lim_{n\to+\infty}{}^{*} J(u_n - w_n) = \chi \quad \text{in } W.$$

Essendo $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{K}_n = \mathbf{K}$, si ha

$$\max \lim_{n\to+\infty} \langle J(u_n - w_n), k - w_n \rangle_W \leq 0 \qquad \forall k \in K .$$

Poniamo $k = w$; si ha

$$\max \lim_{n\to+\infty} \langle J(u_n - w_n), w - w_n \rangle_W \leq 0 ,$$

dunque

$$(2,6) \qquad \max \lim_{n\to+\infty} \langle J(u_n - w_n), w - w_n \rangle_W =$$

$$= \max \lim_{n\to+\infty} \langle J(u_n - w_n), (u_n - w_n) - (u - w) \rangle_W \leq 0 .$$

Da (2,6) in base alla monotonia di J si ha

$$(2,7) \qquad \chi = J(u - w) ;$$

dunque, essendo

$$\langle J v_1 - J v_2 , v_1 - v_2 \rangle_W \geq (\| v_1 \|_W - \| v_2 \|_W)^2$$

$\forall v_1 , v_2 \in W$, [2], si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \| u_n - w_n \|_W = \| u - w \|_W .$$

Essendo V localmente uniformemente convesso, si ha allora

$$(2,8) \qquad \lim_{n\to+\infty} (u_n - w_n) = (u - w) \quad \text{in} \quad W$$

dunque

$$(2,9) \qquad \lim_{n\to+\infty} w_n = w .$$

Da (2,5) (2,7) (2,8) (2,9) segue

$$(2,10) \qquad \begin{cases} \langle J(u - w), k - w \rangle_W \leq 0 & \forall k \in \mathbf{K} \\ w \in \mathbf{K} . \end{cases}$$

Essendo la soluzione di (2,10) unica, (2,8) e (2,9) valgono per l'intera successione $\{ w_n \}$. La tesi è così completamente provata.

Bibliografia

[1] Brézis H., Thèse, in corso di stampa.

[2] Browder F., *Problèmes non linéaires*, Les Presses de l'Université de Montreal (1966).

[3] Lions J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod – Gauthier Villars (1969).

[4] Mosco U., *Perturbations of variational inequalities. Proc. Symp.*, « Pure Math. », *18*, 195–206 (1971).