Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Carla Vaghi

Unicità delle soluzioni limitate e comportamento asintotico delle soluzioni dell'equazione parabolica $Lz = f(x, t, z, p)$, con $f(x, t, z, p)$ funzione discontinua. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **51** (1971), n.1-2, p. 9–16.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_1-2_9_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1971.

Analisi matematica. — *Unicità delle soluzioni limitate e comportamento asintotico delle soluzioni dell'equazione parabolica* $Lz = f(x, t, z, p)$, *con* $f(x, t, z, p)$ *funzione discontinua* (*). Nota I (**) di CARLA VAGHI, presentata dal Corrisp. L. AMERIO.

SUMMARY. — Consider the parabolic equation:

$$\sum_{i,j}^{1\cdots m} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} = f(x, t, z, p), \tag{1}$$

assuming that $f(x, t, z, p)$, defined in $\overline{D} = \{x \in \overline{\Omega}; t, z, p \in J = (-\infty, +\infty)\}$, is measurable and bounded on every bounded set of $\overline{D}$.

Given an appropriate definition of solution, we prove that if $f(x, t, z, p)$ is monotone increasing in z, then all solutions of (1) satisfying the condition $z(x, t)|_{x \in \partial\Omega} = 0$ have the same asymptotic behaviour for $t \to +\infty$. Moreover, if there exists a solution bounded on J, this is the only bounded solution.

§ 1. – Sia Ω un insieme aperto, limitato e connesso di R^m; $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ (1); $J = (-\infty, +\infty)$; $J_0 = [0, +\infty)$; $Q = \Omega \times J$; $Q_0 = \Omega \times J_0$; $Q_\tau = \Omega \times (0 < t < \tau)$; $Q_{\eta,\tau} = \Omega \times (\eta < t < \tau)$; $\Omega_\tau = \{x \in \Omega, t = \tau\}$; $\partial^* Q_\tau = \partial Q_\tau - \Omega_\tau$.

Detto L l'operatore differenziale:

$$L = \sum_{i,j}^{1\cdots m} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial t},$$

si considera l'equazione quasi–lineare

$$Lz = f(x, t, z, p) \qquad ((x, t) \in \overline{Q}; z, p \in J), \tag{1.1}$$

ove

$$p = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\} = \operatorname{grad} z \qquad \left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\right).$$

I coefficienti $a_{ij}(x, t)$ reali, continui per $(x, t) \in \overline{Q}$, ed ivi hölderiani, soddisfano la condizione

$$a_{ij}(x, t) = a_{ji}(x, t).$$

(*) Istituto di Matematica del Politecnico di Milano. Lavoro eseguito nell'ambito della attività del Gruppo Nazionale per l'Analisi funzionale e le sue applicazioni, del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1971.

(**) Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1971.

(1) Indichiamo qui e in seguito con $\bar{A}$ la chiusura di un insieme A.

L'operatore L è parabolico in $\bar{Q}$, cioè $\forall (x, t) \in \bar{Q}$, e per ogni vettore reale $\xi \neq 0$, risulta

$$\sum_{i,j}^{1\cdots m} a_{ij}(x, t)\, \xi_i \xi_j \geq 0 .$$

La funzione $f(x, t, z, p)$ definita in $\bar{D} = \{(x, t) \in \bar{Q} ; z, p \in J\}$, è *misurabile* e *limitata* in ogni dominio limitato.

Posto

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} f_1(x, t, z, p) &= \min \lim_{\xi,\tau,\zeta,\rho \to x,t,z,p} f(\xi, \tau, \zeta, \rho), \\ f_2(x, t, z, p) &= \max \lim_{\xi,\tau,\zeta,\rho \to x,t,z,p} f(\xi, \tau, \zeta, \rho), \end{aligned}$$

si introduce la seguente *definizione di soluzione*: si dice che una funzione $z(x, t)$, definita in $\bar{Q}_T$, è soluzione della (1.1) in $\bar{Q}_T$, se soddisfa le seguenti condizioni:

a) $z(x, t), z_{x_i}(x, t) \in C^0(\bar{Q}_T)$;

b) $z_t(x, t), z_{x_i x_j}(x, t) \in L^2(\bar{Q}_T)$;

c) risulta (2), q.o. in $\bar{Q}_T$,

$$(1.3) \qquad Lz(x, t) \in f_1(x, t, z(x, t), p(x, t)) \vdash\!\dashv f_2(x, t, z(x, t), p(x, t)) .$$

Se poi $z(x, t)$ è definita in $\bar{Q}_0$ (in $\bar{Q}$), si dice che $z(x, t)$ è soluzione in $\bar{Q}_0$ (in $\bar{Q}$), se valgono le condizioni *a*) e *c*), in cui si legga, in luogo di $\bar{Q}_T$, $\bar{Q}_0$ (oppure $\bar{Q}$), e la condizione *b*) in cui si sostituisca a $L^2(\bar{Q}_T)$, $L^2_{loc}(\bar{Q}_0)$ (oppure $L^2_{loc}(\bar{Q})$).

Si osservi che se si modifica la definizione della funzione $f(x, t, z, p)$ nei punti in cui è $f_1(x, t, z, p) < f_2(x, t, z, p)$, considerandola come polidroma e ammettendo che in tali punti assuma tutti i valori dell'intervallo

$$f_1(x, t, z, p) \vdash\!\dashv f_2(x, t, z, p),$$

la (1.3) si può scrivere ancora nella forma (1.1). A tale convenzione non ci atterremo però in seguito, e ci riferiremo sempre alla (1.3).

Ricordiamo anche che $f_1(x, t, z, p)$ è semicontinua inferiormente ed $f_2(x, t, z, p)$ è semicontinua superiormente.

In un precedente lavoro (3) è stato dimostrato che se $f(x, t, z, p)$ è continua in $\bar{D}$, e crescente come funzione di z, allora le soluzioni classiche della (1.1) in $\bar{Q}_0$, soddisfacenti la condizione ai limiti

$$(1.4) \qquad z(x, t)\big|_{x \in \partial\Omega} = 0 , \qquad \forall t \in J_0 ,$$

(2) Per una analoga definizione di soluzione, cfr. ad es. L. AMERIO e G. PROUSE, *On the non-linear wave equation with dissipative term discontinuous with respect to the velocity*, Nota I, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *44* (1968), p. 492.

(3) C. VAGHI, *Sul comportamento asintotico delle soluzioni di equazioni non lineari di tipo parabolico*, Nota I e II, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *41* (1966).

hanno tutte lo stesso comportamento asintotico per $t \to +\infty$. Da tale proprietà segue un teorema di unicità di soluzioni limitate in $\overline{Q}$, nel senso che se esiste una soluzione, soddisfacente la (1.4) $\forall t \in J$, definita in tutto $\overline{Q}$ ed ivi limitata, tale soluzione è l'unica soluzione limitata in $\overline{Q}$.

Scopo del presente lavoro è di estendere questi risultati al caso, ora considerato, in cui la $f(x, t, z, p)$ è funzione discontinua.

La dimostrazione data in (3), relativa al caso classico, è basata su uno studio diretto delle funzioni

$$\eta(t) = \max_{x \in \overline{\Omega}} z(x, t) \quad , \quad \mu(t) = \min_{x \in \overline{\Omega}} z(x, t) ,$$

e il comportamento delle soluzioni è dedotto da alcune disuguaglianze differenziali a cui soddisfano tali funzioni. Nella presente Nota invece, sia il comportamento asintotico che l'unicità della soluzione limitata, sono dedotti da una generalizzazione del ben noto *principio di massimo* relativo alle soluzioni classiche dell'equazione parabolica, che viene qui esteso alle funzioni che sono soluzioni, nel senso sopra indicato, dell'equazione (1.1), con $f(x, t, z, p)$ discontinua (cfr. § 2, lemma II).

Nel § 3 si considerano le soluzioni della (1.1), soddisfacenti la (1.4), e si dimostrano i seguenti teoremi:

I. – *La funzione* $f(x, t, z, p)$, *definita in* $\overline{D} = \{(x, t) \in \overline{Q} ; z, p \in J\}$, *sia misurabile e limitata in ogni dominio limitato. Inoltre esista una funzione* $\omega(z)$, *continua per* $z \in J$, *soddisfacente la condizione*

$$z\omega(z) > 0 \qquad per \quad z \neq 0 \quad (\Rightarrow \omega(0) = 0) , \tag{1.5}$$

e tale che risulti, $\forall x, t$,

$$\begin{cases} f_1(x, t, z, 0) > \omega(z) & per \quad z > 0 \\ f_2(x, t, z, 0) < \omega(z) & per \quad z < 0 . \end{cases} \tag{1.6}$$

Allora il problema (1.1), (1.4) *ammette la soluzione nulla. Ogni altra soluzione in* $\overline{Q}_0$, *è asintotica a questa per* $t \to +\infty$, *nel senso che risulta*

$$\lim_{t \to +\infty} z(x, t) = 0 , \tag{1.7}$$

uniformemente per $x \in \overline{\Omega}$.

Inoltre $z(x, t) \equiv 0$ *è l'unica soluzione limitata in* $\overline{Q}$.

II. – *La funzione* $f(x, t, z, p)$, *definita in* $\overline{D} = \{(x, t) \in \overline{Q} ; z, p \in J\}$, *misurabile e limitata in ogni dominio limitato, sia monotona crescente in* z: *più precisamente esista una funzione* $\omega(z)$, *continua per* $z \in J$, *soddisfacente la* (1.5), *e tale che risulti*, $\forall x, t, z, p$,

$$\begin{cases} f_1(x, t, z+w, p) - f_2(x, t, z, p) > \omega(w) & per \quad w > 0 \\ f_2(x, t, z+w, p) - f_1(x, t, z, p) < \omega(w) & per \quad w < 0 . \end{cases} \tag{1.8}$$

Allora tutte le soluzioni del problema (1.1), (1.4) *hanno, per* $t \to +\infty$, *lo stesso comportamento asintotico, nel senso che, dette* $z_1(x, t)$ *e* $z_2(x, t)$ *due qualsiasi soluzioni, risulta*:

$$\lim_{t \to +\infty} \{z_1(x, t) - z_2(x, t)\} = 0,$$

uniformemente per $x \in \overline{\Omega}$.

Inoltre se la (1.1) *ammette una soluzione in* $\overline{Q}$, *soddisfacente la* (1.4) $\forall t \in J$ *e limitata in* $\overline{Q}$, *questa è l'unica soluzione limitata in* $\overline{Q}$.

III. – *Siano soddisfatte le seguenti ipotesi*:

a) *i coefficienti dell'operatore* L *siano indipendenti da* t:

$$L = \sum_{i,j}^{1\cdots m} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial t} = A - \frac{\partial}{\partial t};$$

b) *l'equazione differenziale*:

$$A\gamma(x) + \lambda\gamma(x) = 0 \tag{1.9}$$

ammetta, in $\overline{\Omega}$, *una soluzione* $\gamma(x) > 0$, *continua con* $\gamma_{x_i}(x)$ *e* $\gamma_{x_i x_j}(x)$ *in* $\overline{\Omega}$, *corrispondente a un valore* $\lambda > 0$;

c) *la funzione* $f(x, t, z, p)$, *definita in* $\overline{D} = \{(x, t) \in \overline{Q}\,;\, z, p \in J\}$, *sia misurabile e limitata in ogni dominio limitato. Inoltre esista una funzione* $\omega(z)$, *continua per* $z \in J$, *soddisfacente la* (1.5) *e tale che risulti*, $\forall x, t, z, p$,

$$\begin{cases} f_1(x, t, z+w, p+w \operatorname{grad} \log \gamma(x)) - f_2(x, t, z, p) > \omega(w) - \lambda w \\ \hfill \textit{per} \quad w > 0, \\ f_2(x, t, z+w, p+w \operatorname{grad} \log \gamma(x)) - f_1(x, t, z, p) < \omega(w) - \lambda w \\ \hfill \textit{per} \quad w < 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Allora tutte le soluzioni del problema (1.1), (1.4) *hanno, per* $t \to +\infty$, *lo stesso comportamento asintotico, nel senso precisato in* II.

Inoltre se la (1.1) *ammette una soluzione definita in* $\overline{Q}$, *soddisfacente la* (1.4) $\forall t \in J$ *e limitata in* $\overline{Q}$, *questa è l'unica soluzione limitata in* $\overline{Q}$.

Nel § 4 si suppone la frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1, e si studiano le soluzioni della (1.1) soddisfacenti la condizione (4):

$$\left.\frac{\partial z(x, t)}{\partial \nu}\right|_{x \in \partial\Omega} = \psi(x, t, z), \tag{1.11}$$

con $\psi(x, t, z)$ definita in $S = \{x \in \partial\Omega\,;\, t, z \in J\}$, *misurabile*, e *limitata* in ogni insieme limitato di S. Precisamente posto:

$$\psi_1(x, t, z) = \min_{\xi, \tau, \zeta \to x, t, z} \lim \psi(\xi, \tau, \zeta),$$

$$\psi_2(x, t, z) = \max_{\xi, \tau, \zeta \to x, t, z} \lim \psi(\xi, \tau, \zeta),$$

(4) Con $\partial/\partial\nu$ si intende la derivata normale, orientata verso l'interno.

si dice che $z(x, t)$ soddisfa la (1.11) se risulta, $\forall x \in \partial\Omega$, e $\forall t \in J$,

$$\frac{\partial}{\partial\nu} z(x, t) \in \psi_1(x, t, z(x, t))\,|\!\!-\!\!-\!\!|\,\psi_2(x, t, z(x, t)). \tag{1.12}$$

Si ottengono teoremi analoghi a quelli sopra riportati, e in particolare si prova che *se* $f(x, t, z, p)$ *soddisfa alle ipotesi di* II *e* $\psi(x, t, z)$ *è monotona crescente in* z, *allora tutte le soluzioni della* (1.1) *soddisfacenti la* (1.11), *hanno lo stesso comportamento asintotico nel senso precisato in* II. *Inoltre, se esiste una soluzione del problema* (1.1), (1.11) *definita in* $\overline{Q}$ *ed ivi limitata, tale soluzione è l'unica soluzione limitata in* $\overline{Q}$.

§ 2. – Nella dimostrazione del teorema I si utilizzano i due seguenti lemmi riguardanti il *principio di massimo* (5):

LEMMA I. – *Sia* $z(x, t)$ *una funzione definita in* $\overline{Q}_T$, *soddisfacente le condizioni* a) *e* b) *del* § 1, *soluzione debole* (6) *dell'equazione*

$$Lz(x, t) = \mathcal{F}(x, t),$$

con $\mathcal{F}(x, t)$ *definita q.o. in* $\overline{Q}_T$ *ed ivi misurabile e limitata.*

Allora se è $\mathcal{F}(x, t) > 0$ ($\mathcal{F}(x, t) < 0$) *q.o. in* $\overline{Q}_T$, $z(x, t)$ *assume il suo valore massimo (minimo) su* $\partial^* Q_T$.

LEMMA II. – *Sia* $z(x, t)$ *una soluzione in* $\overline{Q}_T$ *dell'equazione* (1.1), *nel senso indicato al* § 1. *Inoltre* $f(x, t, z, p)$ *soddisfi alle ipotesi del teorema* I.

Allora se $z(x, t)$ *ha un massimo* > 0 (*minimo* < 0) *in* $\overline{Q}_T$, *questo è assunto su* $\partial^* Q_T$.

Dimostriamo il lemma I. Ammettiamo che $z(x, t)$ abbia un *massimo* in un punto $(\bar{x}, \bar{t}) \notin \partial^* Q_T$. Esiste allora un cilindro $R_{\bar{x}, \bar{t}}$, definito dalle limitazioni

$$|x - \bar{x}| < \delta \quad , \quad t_1 < t < \bar{t} \qquad (\delta = \text{cost.} > 0 \text{ opportuna}, \ t_1 > 0)$$

tale che risulti

$$\overline{R}_{\bar{x}, \bar{t}} \subset Q_T \cup \Omega_T .$$

Indichiamo con $\overline{O}_{t_1}$ ed $\overline{O}_{\bar{t}}$ le intersezioni di $\overline{R}_{\bar{x}, \bar{t}}$ con i piani $t = t_1$ e $t = \bar{t}$.

In $\overline{R}_{\bar{x}, \bar{t}}$, consideriamo la funzione $u(x, t)$ definita come soluzione classica del problema

$$\begin{cases} Lu(x, t) = 0 \\ u(x, t)\big|_{\partial^* R_{\bar{x}, \bar{t}}} = z(x, t)\big|_{\partial^* R_{\bar{x}, \bar{t}}} \end{cases} \qquad (\partial^* R_{\bar{x}, \bar{t}} = \partial R_{\bar{x}, \bar{t}} - O_{\bar{t}}), \tag{2.1}$$

e poniamo

$$v(x, t) = z(x, t) - u(x, t). \tag{2.2}$$

(5) Per il principio di massimo relativo a soluzioni deboli, cfr. anche J. KADLEC, *Strong maximum principle for weak solutions of nonlinear parabolic differential inequalities*, «Časopis Pro Pěstování Mat.», *92* (1967), pp. 373–389.

(6) Cfr. ad es. J. L. LIONS, *Problemi misti nel senso di Hadamard classici e generalizzati*, «Rend. Seminario Mat. e Fis. di Milano», *28* (1959), p. 154.

Anche la funzione $v(x, t)$ risulta definita in $\overline{R}_{\bar{x},\bar{t}}$ ed è ivi necessariamente continua. Inoltre $v(x, t)$ può essere considerata come soluzione debole (7) del problema

$$(2.3) \qquad \begin{cases} Lv(x, t) = \mathcal{F}(x, t) \\ v(x, t)\big|_{\partial^* R_{\bar{x},\bar{t}}} = 0 . \end{cases}$$

Detta $G(x, t; \xi, \tau)$ la funzione di Green del problema (2.3), si ha allora:

$$(2.4) \qquad v(x, t) = -\int_{t_1}^{t} d\tau \int_{O_{t_1}} G(x, t; \xi, \tau)\, \mathcal{F}(\xi, \tau)\, d\xi .$$

Questo è ben noto se $\mathcal{F}(x, t)$ è hölderiana in $\overline{R}_{\bar{x},\bar{t}}$ (perchè allora $v(x, t)$ è soluzione classica). Nel caso qui considerato, la (2.4) si deduce dal teorema di dipendenza continua dal termine noto (8), valido per le soluzioni deboli della (2.3), ottenendo $\mathcal{F}(x, t)$ come limite di una successione $\mathcal{F}_n(x, t)$ di funzioni hölderiane in $\overline{R}_{\bar{x},\bar{t}}$ ed ivi equilimitate.

Poichè $\mathcal{F}(x, t)$ è positiva, per ipotesi, q.o. in $\overline{Q}_T$ (e quindi anche in $\overline{R}_{\bar{x},\bar{t}}$), ed è (9) $G(x, t; \xi, \tau) > 0$ per $t > \tau$, risulta, per la (2.4),

$$(2.5) \qquad v(x, t) < 0 \quad , \quad \forall x \in O_{t_1} \quad , \quad t_1 < t \leq \bar{t} .$$

D'altra parte, per il principio di massimo valido (10) per le soluzioni classiche del problema (2.1), si ha, in $\overline{R}_{\bar{x},\bar{t}}$,

$$u(x, t) \leq \max_{(x,t) \in \partial^* R_{\bar{x},\bar{t}}} u(x, t) = \max_{(x,t) \in \partial^* R_{\bar{x},\bar{t}}} z(x, t) .$$

Ne segue, per la (2.2) e la (2.5), che risulta

$$z(\bar{x}, \bar{t}) = u(\bar{x}, \bar{t}) + v(\bar{x}, \bar{t}) < \max_{(x,t) \in \partial^* R_{\bar{x},\bar{t}}} z(x, t) ,$$

assurdo se $(\bar{x}, \bar{t})$ è di massimo per $z(x, t)$.

Il lemma I è pertanto dimostrato. Proviamo ora il lemma II.

Ammettiamo che $z(x, t)$ abbia *massimo positivo* in un punto $(\bar{x}, \bar{t}) \notin \partial^* Q_T$. In $(\bar{x}, \bar{t})$ risulta:

$$z(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{z} > 0 \quad , \quad p(\bar{x}, \bar{t}) = 0 ,$$

(7) Cfr. l.c. in (6).

(8) J. L. LIONS, l.c. in (6), p. 160.

(9) Cfr. ad es. A. FRIEDMAN, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall (1964), Corollario 1, p. 83.

(10) Cfr. ad es. O. A. LADYŽENSKAJA, V. A. SOLONNIKOV e N. N. URAL' CEVA, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, «American Math. Soc.», (1968), th. 2.1 e coroll. 2.1, pp. 13–15.

e quindi, per la (1.6), è:

$$f_1(\bar{x}, \bar{t}, \bar{z}, 0) > \omega(\bar{z}) > 0 .$$

Per la continuità di $z(x, t)$ e $p(x, t)$, e per la semicontinuità inferiore di $f_1(x, t, z, p)$, esiste allora un cilindro $\bar{R}_{\bar{x},\bar{t}} \subset Q_{\bar{t}} \cup \Omega_{\bar{t}}$, definito dalle limitazioni

$$|x - \bar{x}| \leq \bar{\delta} \quad , \quad \bar{t} - \bar{\delta} \leq t \leq \bar{t} ,$$

tale che, in $\bar{R}_{\bar{x},\bar{t}}$, risulti

$$f_1(x, t, z(x, t), p(x, t)) > \frac{1}{2}\, \omega(\bar{z}) .$$

Ne segue che $Lz(x, t)$ assume, per la (1.3), in ogni punto di $\bar{R}_{\bar{x},\bar{t}}$ in cui è definita, un valore positivo. Indichiamo tale valore con $\mathfrak{F}(x, t)$:

$$Lz(x, t) = \mathfrak{F}(x, t) .$$

$\mathfrak{F}(x, t)$ risulta perciò definita q.o. in $\bar{R}_{\bar{x},\bar{t}}$ ed è ivi limitata e positiva.

Ma allora, per il lemma I, $z(x, t)$ non può avere un massimo in $(\bar{x}, \bar{t})$, e l'ipotesi ammessa è assurda.

Analogamente si verifica che $z(x, t)$ non può avere un minimo negativo in un punto $\notin \partial^* Q_T$.

Aggiungiamo infine una assai semplice *osservazione sulle proprietà dell'integrale dell'equazione*

$$\varphi'(t) = -\, \omega(\varphi(t)) \tag{2.6}$$

soddisfacente la condizione

$$\varphi(\bar{t}) = \bar{\varphi} \neq 0 ,$$

poichè la (2.6) ci servirà in seguito (cfr. Nota II, § 3) come *equazione di confronto*.

Ricordiamo che $\omega(\rho)$ soddisfa la (1.5). Inoltre, senza ledere la generalità dell'ipotesi del teorema I, possiamo ammettere che sia

$$\left| \int_0^\alpha \frac{d\rho}{\omega(\rho)} \right| = +\infty \quad , \qquad \forall\ \alpha \neq 0 . \tag{2.7}$$

Osserviamo che, per la (2.6), $\bar{\varphi} > 0 \Rightarrow \varphi(t)$ *decrescente* in tutto l'intorno di $\bar{t}$ in cui sia $\varphi(t) > 0$. Dimostriamo poi che $\varphi(t)$ non può annullarsi in un punto al finito, e quindi *se è* $\bar{\varphi} > 0$, $\varphi(t)$ *è positiva, decrescente in* $\bar{t} \vdash +\infty$, *e inoltre risulta*:

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0 . \tag{2.8}$$

Dalla (2.6), integrando fra t e $\bar{t}$ (con $t > \bar{t}$), si ha infatti:

$$t - \bar{t} = \int_{t}^{\bar{t}} \frac{\varphi'(t)}{\omega(\varphi(t))}\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(t)}^{\varphi(\bar{t})} \frac{\mathrm{d}\rho}{\omega(\rho)}, \tag{2.9}$$

assurdo, per la (2.7), se fosse in un punto t (al finito) $\varphi(t) = 0$.

Per verificare la (2.8), ammettiamo, per assurda ipotesi, che sia

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = l > 0 \qquad (\Rightarrow \varphi(t) \geq l).$$

Si ha allora:

$$\int_{\varphi(t)}^{\varphi(\bar{t})} \frac{\mathrm{d}\rho}{\omega(\rho)} \leq \int_{l}^{\varphi(\bar{t})} \frac{\mathrm{d}\rho}{\omega(\rho)} < +\infty,$$

mentre dalla (2.9) segue:

$$\int_{\varphi(t)}^{\varphi(\bar{t})} \frac{\mathrm{d}\rho}{\omega(\rho)} \to +\infty \qquad \text{per} \quad t \to +\infty.$$

Pertanto la (2.8) è provata. Analogamente si verifica che, *se è* $\bar{\varphi} < 0$, $\varphi(t)$ *è negativa, crescente in* $\bar{t} \vdash +\infty$, *e vale ancora la* (2.8).