Emil Molnár

Sui mosaici dello spazio di dimensione n.

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **51** (1971), n.3-4, p. 177–185.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_3-4_177_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1971.

Geometria. — *Sui mosaici dello spazio di dimensione n.* Nota (*) di EMIL MOLNÁR, presentata dal Socio B. SEGRE.

ZUSAMMENFASSUNG. — Spiegeln wir einen Würfel im n–dimensionalen euklidischen Raum auf jede von seinen Seitenhyperebenen, so gewinnen wir ein aus $2n+1$ Würfeln bestehendes « Kreuz ». F. KÁRTESZI *warf die Frage auf* [1], *ob der Raum mit kongruenten, einander teilweise nicht überdeckenden Kreuzen lückenlos ausfüllbar sei.*

Wir sprechen kürzlich nur über Kreuzausfüllung. Es handelt sich im weiteren um eine gitterförmige Kreuzausfüllung, die Kreuzmittelpünkte bilden also ein n–dimensinales Punktgitter.

Wir identifizieren zwei gitterförmige Kreuzausfüllungen, wenn es eine solche, die zu den Ausfüllungen gehörenden Würfelgitter ineinander abbildende, lineare Abbildung gibt, die die durch die Kreuzmittelpünkte bestimmte Punktgitter auch einander zuordnet.

Das Hauptresultat der vorligenden Arbeit ist der folgende SATZ: *Die verschiedene gitterförmige Kreuzausfüllungen des n–dimensionalen euklidischen Raumes und die miteinander nicht isomorphe Abelsche Gruppen von der Ordnung* $2n+1$ *können einander ein–eindeutig zugeordnet werden.*

Die Anzahl der verschiedenen gitterförmigen Kreuzausfüllungen ist $f(n)=g(\alpha_1)\,g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_s)$. *Hier ist* $2n+1=p_1^{\alpha_1}\,p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ *die Primfaktorisation der Zahl* $2n+1$, *und* $g(\alpha)$ *ist die Anzahl der wesentlich verschiedenen addiviten Herstellungen der natürlichen Zahl* α *aus positiven ganzen Summanden.*

1. In questa Nota viene trattato un problema di F. Kárteszi [1], pervenendo alla relativa soluzione.

Consideriamo un cubo di dimensione n ed i suoi simmetrici rispetto alle facce del cubo (facce di dimensione $n-1$). Questi $2n+1$ cubi formano una croce di dimensione n. Il problema è di vedere se e come *è possibile costruire un mosaico – costruito da croci congruenti – che risulti un ricoprimento perfetto dell'intero spazio.*

Un mosaico verrà chiamato *mosaico reticolato*, se i centri degli elementi di esso formano un reticolo (cioè l'insieme dei punti che – in un opportuno riferimento cartesiano – hanno coordinate intere). Un tal mosaico risulta un *ricoprimento perfetto* (cioè senza lacune né punti interni più volte ricoperti) *dello spazio.*

Se $n=1$, 2 allora esiste un tal mosaico, ma evidentemente di tipo reticolato. M. Freller ha costruito un tale mosaico reticolato nel caso $n=3$ [2]; poi G. Korchmáros ha ottenuto un mosaico reticolato di tipo analogo, ma per via più generale, valido anche per $n>3$, [3].

Se un'applicazione lineare trasforma un mosaico di croci su di un altro, allora diciamo che i due mosaici sono *isomorfi*. Ne viene la seconda parte del problema: determinare il n u m e r o dei mosaici reticolati eteromorfi (ossia

(*) Pervenuta all'Accademia il 21 settembre 1971.

a due a due non isomorfi). Non si conoscono finora mosaici di croci non reticolati.

Il risultato principale di questa Nota è che *Esiste una corrispondenza biunivoca fra i gruppi abeliani eteromorfi di ordine* $2n+1$ *ed i mosaici reticolati eteromorfi di dimensione* n.

2. Nel seguito, *mosaico* significa un mosaico costituito da croci di dimensione n, con l'intesa ch'esso riempia senza lacune lo spazio di dimensione n. La *croce* di dimensione n si compone di $2n+1$ cubi di dimensione n. Questi cubi appartenenti al mosaico formano un *ricoprimento cubico* dello spazio ed i centri dei cubi componenti formano un *reticolo di tipo cubico*. Indicheremo con K il ricoprimento cubico, e con $\mathbf{X}$ il reticolo dei centri.

Sia O uno dei punti di $\mathbf{X}$. Scegliamo in $\mathbf{X}$ una base ortonormata opportuna: $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$. Avremo

$$(1) \qquad \mathbf{X} = \{ \boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n \ ; \ x_1, \cdots, x_n \text{ interi} \} .$$

Il sistema E sia l'insieme

$$(2) \qquad E = \{ \boldsymbol{o}, \boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n, -\boldsymbol{e}_n \} ,$$

cioè un sistema di $2n+1$ vettori. In tal modo l'insieme dei centri dei cubi componenti della croce di centro $\boldsymbol{x}$ è dato da:

$$(3) \qquad E_{\mathbf{X}} = \boldsymbol{x} + E = \{ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e} : \boldsymbol{e} \in E \} .$$

L'insieme $\mathbf{X}$ (rispetto all'addizione) è un gruppo abeliano.

Siano i vettori $\boldsymbol{r}_k \in \mathbf{X}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ linearmente indipendenti; allora

$$(4) \qquad \mathbf{R} = \{ \boldsymbol{r} : \boldsymbol{r} = u_1 \boldsymbol{r}_1 + u_2 \boldsymbol{r}_2 + \cdots + u_n \boldsymbol{r}_n \ ; \ u_1, u_2, \cdots, u_n \text{ interi} \}$$

è un sottogruppo di $\mathbf{X}$; $\mathbf{R}$ determina un reticolo di punti. Se i centri delle croci di un mosaico formano un siffatto $\mathbf{R}$, denoteremo altresì con $\mathbf{R}$ – se non vi sia equivoco – anche il mosaico (il quale riesce allora reticolato).

Consideriamo un reticolo cubico $\mathbf{K}' \sim \mathbf{X}'$; O', $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots, \boldsymbol{e}'_n$. Sia una applicazione biunivoca L, che trasporti $\mathbf{X}$ su $\mathbf{X}'$. Se $\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n$, sia $\boldsymbol{x}' = L(\boldsymbol{x})$, dove

$$(5) \qquad \boldsymbol{x}' = L(\boldsymbol{x}) = x_1 \boldsymbol{f}'_1 + x_2 \boldsymbol{f}'_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{f}'_n + \boldsymbol{b}' ,$$

i vettori $\boldsymbol{f}'_1, \boldsymbol{f}'_2, \cdots, \boldsymbol{f}'_n$ essendo elementi di $\{ \boldsymbol{e}'_1, -\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n, -\boldsymbol{e}'_n \}$ in ordine arbitrario, fra loro linearmente indipendenti. Inoltre $\boldsymbol{b}' \in \mathbf{X}'$, ed il vettore $\boldsymbol{b}'$ dipende dalla scelta di O' $(O' = L(O) \Rightarrow \boldsymbol{b}' = \boldsymbol{o})$.

Considerando i mosaici reticolati appartenenti ad $\mathbf{R}$, rispettivamente ad $\mathbf{R}'$; essi sono identici, se e soltanto se esiste una L soddisfacente alle (5), che trasporti $\mathbf{R}$ su $\mathbf{R}'$.

Essendo **R** un sottogruppo del gruppo abeliano **X**, si può costruire il gruppo fattoriale **X**/**R**. Indicheremo con $\{\boldsymbol{x}\}$ una classe di vettori $\boldsymbol{x}$ definita da

(6) $$\{\boldsymbol{x}\} = \{\boldsymbol{y}\} \quad \text{se e soltanto se} \quad \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}.$$

La somma degli elementi di **X**/**R** sia definita assumendo

(7) $$\{\boldsymbol{x}\} + \{\boldsymbol{y}\} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\},$$

e particolarmente

(8) $$u\{\boldsymbol{x}\} = \{u\boldsymbol{x}\}, \quad \text{se } u \text{ è un numero intero.}$$

Il gruppo fattoriale **X**/**R** rispetto all'operazione così definita è un gruppo abeliano, avente quale elemento neutro la classe $\{\boldsymbol{o}\}$.

Il legame fra mosaico appartenente ad **R** e il gruppo fattoriale **X**/**R** avrà un ufficio essenziale nei nostri ragionamenti.

3. Per dimostrare il Teorema principale premettiamo alcuni Lemmi. (La fig. 1 rappresenta il contenuto geometrico della relativa dimostrazione).

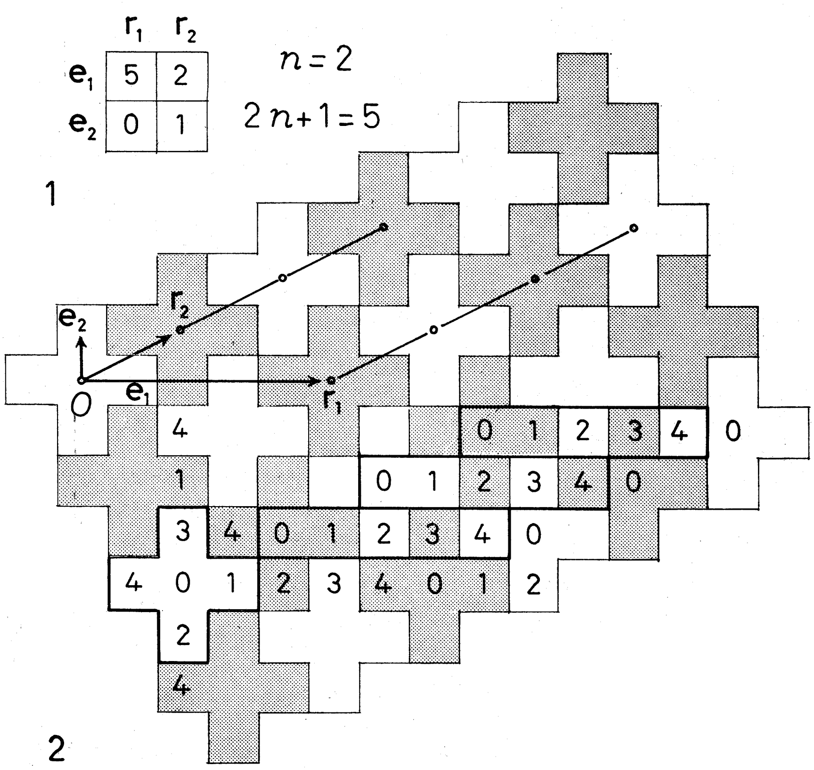

Fig. 1.

LEMMA 1. – *Affinchè un mosaico inerente ad* **R** *sia un ricoprimento perfetto, è necessario e sufficiente che ogni vettore di* **X** *abbia una e soltanto una rappresentazione della forma*:

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{e} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}\,,\ \boldsymbol{r} \in \mathbf{R}\,,\ \boldsymbol{e} \in E)\,. \tag{9}$$

Dimostrazione. – In virtù di (3), si vede che (9) vuol dire che un cubo elementare di **X** col centro $\boldsymbol{x}$ ed uno dei cubi componenti della croce di centro r sono identici. L'unicità della rappresentazione (9) assicura che due croci qualsiasi inerenti ad **R** sono prove di punti interni comuni.

Il seguente Lemma dice lo stesso.

LEMMA 2. – **R** *risulta un ricoprimento perfetto* (mediante croci), *se e soltanto se ogni classe* (elemento) *di* $\mathbf{X}/\mathbf{R}$ *contiene uno ed un solo elemento di* E.

Dimostrazione. – La formula (9) esprime precisamente che la classe $\{\boldsymbol{x}\}$ di $\mathbf{X}/\mathbf{R}$ contiene uno e soltanto uno degli elementi di E.

Ogni affermazione delle seguenti Osservazioni 1 è corollario semplice del Lemma 2.

Osservazioni 1. – Se **R** risulta un ricoprimento perfetto, allora

1) $\mathbf{X}/\mathbf{R}$ è un gruppo abeliano di ordine $2n + 1$;
2) inverso di $\{\boldsymbol{e}\}$ è $\{-\boldsymbol{e}\}$ $(\boldsymbol{e}\,, -\boldsymbol{e} \in E)$;
3) se $u\{\boldsymbol{e}\} = \{\boldsymbol{o}\}$, allora $u\boldsymbol{e} \in \mathbf{R}$ (u intero);
4) se $u_j\{\boldsymbol{e}_j\} + u_k\{\boldsymbol{e}_k\} = \{\boldsymbol{e}\}$, allora $u_j\,\boldsymbol{e}_j + u_k\,\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{e} \in \mathbf{R}$ $(\boldsymbol{e}_j\,, \boldsymbol{e}_k\,, \boldsymbol{e} \in E$; $u_j\,, u_k$ interi).

Nel seguito vedremo che le condizioni contenute in 1)–4) offrono una strada che conduce alla costruzione di un ricoprimento perfetto mediante croci. Richiameremo inoltre il classico Teorema fondamentale dei gruppi finiti abeliani.

LEMMA 3. – *a*) *Prescindendo da un isomorfismo, ogni gruppo finito abeliano è decomponibile univocamente in una somma diretta di sottogruppi ciclici* (*ogni sottogruppo siffatto ha per ordine una potenza d'un numero primo*).

b) *Se* $2n + 1 = p_1^{\alpha_1} \cdots p_j^{\alpha_j} \cdots p_s^{\alpha_s}$, *allora considerando i numeri naturali*

$$\alpha_{j1} \leqq \cdots \leqq \alpha_{jk} \leqq \cdots \leqq \alpha_{jt} \qquad (j = 1\,, 2\,, \cdots, s) \tag{10}$$

soddisfacenti alle condizioni

$$\alpha_j = \alpha_{j1} + \cdots + \alpha_{jk} + \cdots + \alpha_{jt_j}\,, \tag{11}$$

esiste sempre un tal gruppo abeliano – prescindendo da un isomorfismo – il quale è somma di sottogruppi ciclici d'ordine $\cdots, p_j^{\alpha_{j1}}, \cdots, p_j^{\alpha_{jk}}, \cdots, p_j^{\alpha_{jt_j}}, \cdots$; *ogni gruppo abeliano* (G , +) *d'ordine* $2n + 1$ *è di questo tipo.*

Ciò vuol dire, considerando detto gruppo (G , +), che si può rappresentare ogni suo elemento nella forma

$$g = c_{11} g_{11} + \cdots + c_{jk} g_{jk} + \cdots + c_{st_s} g_{st_s}, \tag{12}$$

dove le c_{jk} siano numeri interi, $0 \leqq c_{jk} < p_j^{\alpha_{jk}}$, ord. $(g_{jk}) = p_j^{\alpha_{jk}}$.

LEMMA 4. – *Per ogni gruppo abeliano G di ordine* $2n+1$ *si può trovare un* **R** (*cioè un ricoprimento perfetto mediante croci*) *tale che i gruppi* **X**/**R** *ed* **R** *siano isomorfi.*

Prima di tutto, per illustrare la successiva dimostrazione, diamo alcuni disegni o Tabelle.

$n = 3$

$2n+1 = 7$

7	2	3
0	1	0
0	0	1

$n = 4$

$2n+1 = 3^2$

1.

9	2	3	4
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

2.

3	0	1	1
0	3	1	2
0	0	1	0
0	0	0	1

$n = 13$

$2n+1 = 3^3$

$f(13) = g(3) = 3$

1.

27	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	1											
		1										
			1									
				1								
					1							
						1						
							1					
								1				
									1			
										1		
											1	
												1

2.

3	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
9	2	3	4	1	2	3	4	5	6	7	8
	1										
		1									
			1								
				1							
					1						
						1					
							1				
								1			
									1		
										1	
											1

3.

3	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	0	0	1	2	1	1	2	2
3	1	2	1	2	0	0	1	2	1	2
	1									
		1								
			1							
				1						
					1					
						1				
							1			
								1		
									1	
										1

Fig. 2.

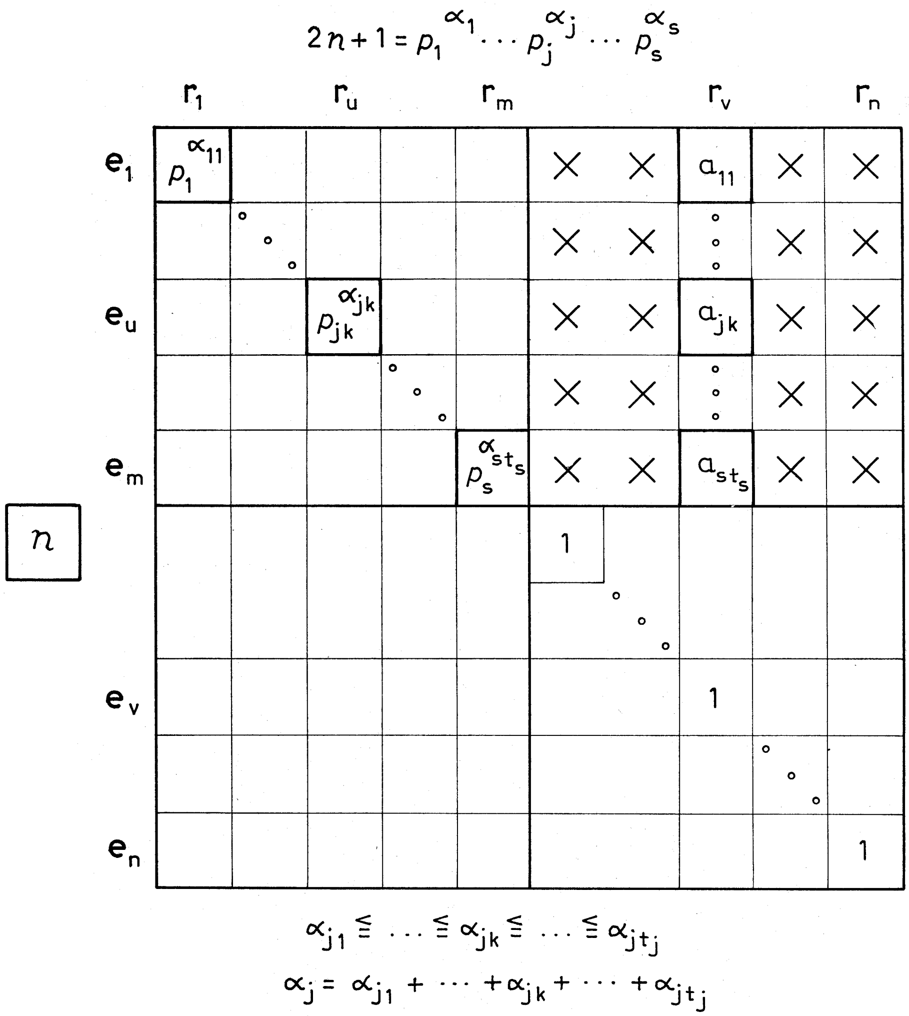

Fig. 3.

La fig. 2, mediante casi concreti, dà una spiegazione ausiliare alla fig. 3. Come si vede nella fig. 3, i vettori fondamentali di **R**, cioè i vettori $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n$ sono collocati nelle colonne della Tabella; nella riga u–esima scriviamo la coordinata del vettore $\boldsymbol{e}_u$. Ogni posto vuoto significa uno zero, mentre un posto con crocetta sta per un intero qualsiasi.

Dimostrazione. – Mediante una scelta opportuna dei primi $m = t_1 + t_2 + \cdots + t_s$ esemplari nei vettori fondamentali, si può assicurare che gli elementi $\{\boldsymbol{e}_1\}, \cdots, \{\boldsymbol{e}_u\}, \cdots, \{\boldsymbol{e}_m\}$ abbiano rispettivamente gli ordini $p_1^{\alpha_{11}}, \cdots, p_j^{\alpha_{jk}}, \cdots, p_s^{\alpha_{st_s}}$; queste classi contengono – manifestamente – gli elementi $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_u, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ di E, inoltre le classi inverse $\{-\boldsymbol{e}_1\} = \{(p_1^{\alpha_{11}} - 1)\,\boldsymbol{e}_1\}, \cdots, \{-\boldsymbol{e}_u\}, \cdots, \{-\boldsymbol{e}_m\}$ contengono rispettivamente i vettori $-\boldsymbol{e}_1, \cdots, -\boldsymbol{e}_u, \cdots, -\boldsymbol{e}_m$.

Occorre poi spiegare particolareggiatamente la scelta dei vettori $\boldsymbol{r}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{r}_v, \cdots, \boldsymbol{r}_m$. Il vettore

$$(13) \qquad \boldsymbol{r}_v = a_{11}\,\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{jk}\,\boldsymbol{e}_u + \cdots + a_{st_s}\,\boldsymbol{e}_m + \boldsymbol{e}_v$$

sia scelto in tal guisa che la classe

$$(14) \qquad a_{11}\{\boldsymbol{e}_1\} + \cdots + a_{jk}\{\boldsymbol{e}_u\} + \cdots + a_{st_s}\{\boldsymbol{e}_m\},$$

appartenente ad $\mathbf{X}/\mathbf{R}$, contenga il vettore $-\boldsymbol{e}_v$ di E, $(m+1 \leqq v \leqq n)$. – Confrontando colla (6), si vede che la (13) esprime appunto questo fatto. – L'inversa della classe (14) contiene $\boldsymbol{e}_v$.

Per soddisfare le esigenze del Lemma 2, supponiamo che i coefficienti a in (14) godano delle seguenti proprietà:

1) a_{jk} intero, $0 \leqq a_{jk} \leqq p_j^{\alpha_{jk}}$;
2) se a_{jk} è l'unico a che sia diverso da zero, allora $2 \leqq a_{jk} \leqq (p_j^{\alpha_{jk}} - 1)/2$ (se $p_j^{\alpha_{jk}} > 3$);
3) se almeno uno dei coefficienti è diverso da zero, ed il primo di essi è a_{jk}, allora $1 \leqq a_{jk} \leqq (p_j^{\alpha_{jk}} - 1)/2$.

Si può ora controllare che con tale scelta si ottengono n vettori linearmente indipendenti e che in ogni classe della forma

$$(15) \qquad c_{11}\{\boldsymbol{e}_1\} + \cdots + c_{jk}\{\boldsymbol{e}_u\} + \cdots + c_{st_s}\{\boldsymbol{e}_m\} \qquad (0 \leqq c_{jk} < p_j^{\alpha_{jk}})$$

di gruppo fattoriale $\mathbf{X}/\mathbf{R}$ c'è uno e soltanto uno dei vettori appartenenti ad E.

Basta far vedere che ogni elemento di $\mathbf{X}/\mathbf{R}$ può scriversi nella forma (15). Sia

$$(16) \qquad \boldsymbol{x} = \cdots + x_u\,\boldsymbol{e}_u + \cdots + x_v\,\boldsymbol{e}_v + \cdots$$

un elemente arbitrario di $\mathbf{X}$. Sottraendo da questo il vettore

$$x_{m+1}\,\boldsymbol{r}_{m+1} + \cdots + x_v\boldsymbol{r}_v + \cdots + x_n\boldsymbol{r}_n$$

appartenente ad $\mathbf{R}$, e poi uno dopo l'altro (con molteplicità opportune) i vettori $\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_u, \cdots, \boldsymbol{r}_m$, si vede che $\boldsymbol{x}$ può scriversi nella forma

$$(17) \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{r} + c_{11}\,\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_{jk}\,\boldsymbol{e}_u + \cdots + c_{st_s}\,\boldsymbol{e}_m,$$

dove $0 \leqq c_{jk} < p_j^{\alpha_{jk}}$, $\quad \boldsymbol{r} \in \mathbf{R}$.

In tal modo si può vedere che i vettori fondamentali nella fig. 3 forniscono di fatto un ricoprimento reticolato $\mathbf{R}$, gli elementi di $\mathbf{X}/\mathbf{R}$ possono scriversi nella forma (15) e, in base alla (12), la corrispondenza

$$g_{11} \to \{\boldsymbol{e}_1\}, \cdots, g_{jk} \to \{\boldsymbol{e}_u\}, \cdots, g_{st_s} \to \{\boldsymbol{e}_m\}$$

risulta un isomorfismo $\mathbf{G} \cong \mathbf{X}/\mathbf{R}$.

Nel seguito **R** vuol dire – nel senso della fig. 3 e del Lemma 4 – un ricoprimento reticolato. Sia **R**$'$ un altro, appartenente ad **X**$'$ con punto iniziale O' e con base ortonormata $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \cdots, \boldsymbol{e}_n')$. Il Lemma seguente si riallaccia alla (5).

LEMMA 5. – *I ricoprimenti reticolati* **R** *ed* **R**$'$ *sono identici se e soltanto se i gruppi fattoriali* **X**/**R** *ed* **X**$'$/**R**$'$ *sono isomorfi.*

Dimostrazione. – Supponiamo che **R** ed **R**$'$ siano identici, cioè esista un'applicazione L della forma (5) che trasformi **R** su **R**$'$. Se L è tale che $O' = L(O)$, allora $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{o}$. Per stabilire che $\{\boldsymbol{x}\} (\in \mathbf{X}/\mathbf{R}) \rightarrow \{\boldsymbol{x}'\} (\in \mathbf{X}/\mathbf{R})$, scegliamo $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{x}' = L(\boldsymbol{x})$. In tal modo la rappresentazione $\mathbf{X}/\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{X}'/\mathbf{R}'$ sarà un isomorfismo, in quanto:

$$\{\boldsymbol{x}\} + \{\boldsymbol{y}\} = \{(x_1 + y_1)\,\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (x_n + y_n)\,\boldsymbol{e}_n\} \rightarrow$$
$$\rightarrow \{(x_1 + y_1)\,\boldsymbol{f}_1' + \cdots + (x_n + y_n)\,\boldsymbol{f}_n'\} = \{\boldsymbol{x}'\} + \{\boldsymbol{y}'\}\,;$$
$$-\{\boldsymbol{x}\} = \{(-x_1)\,\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (-x_n)\,\boldsymbol{e}_n\} \rightarrow$$
$$\rightarrow \{(-x_1)\,\boldsymbol{f}_1' + \cdots + (-x_n)\,\boldsymbol{f}_n'\} = -\{\boldsymbol{x}'\}\,.$$

Inversamente, supponiamo che **X**/**R** ed **X**$'$/**R**$'$ siano isomorfi. Secondo il Lemma 2, gli elementi di $E = \{\boldsymbol{o}, \boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n, -\boldsymbol{e}_n\}$ caratterizzano il gruppo fattoriale **X**/**R**; similmente, gli elementi del sistema $E' = \{\boldsymbol{o}, \boldsymbol{e}_1', -\boldsymbol{e}_1', \cdots, \boldsymbol{e}_n', -\boldsymbol{e}_n'\}$ caratterizzano **X**$'$/**R**$'$. Dunque l'isomorfismo $\mathbf{X}/\mathbf{R} \cong \mathbf{X}'/\mathbf{R}'$ stabilisce una corrispondenza biunivoca fra gli elementi di E e quelli di E'; cioè $\boldsymbol{o} \longleftrightarrow \boldsymbol{o}$, e se $\boldsymbol{e}(\in E) \longleftrightarrow \boldsymbol{e}'(\in E')$, allora $-\boldsymbol{e} \longleftrightarrow -\boldsymbol{e}'$.

Verrà indicata con $(\boldsymbol{f}_1', \boldsymbol{f}_2', \cdots, \boldsymbol{f}_n')$ la corrispondente della base $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$. Ora si può definire l'applicazione lineare L, quella che muta il vettore

$$x_1\,\boldsymbol{e}_1 + x_2\,\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\,\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{x}\,(\in X)$$

nel vettore

$$L(\boldsymbol{x}) = x_1\,\boldsymbol{f}_1' + x_2\,\boldsymbol{f}_2' + \cdots + x_n\,\boldsymbol{f}_n' = \boldsymbol{x}'\,(\in \mathrm{X}')\,.$$

Ma questa è conforme alla (5), sicchè l'immagine del reticolo cubico **K** sarà un reticolo cubico **K**$'$.

Si rileva dalle Osservazioni 1 e dal Lemma 2 che, nella costruzione (rappresentata mediante la fig. 3) scrivendo $(\boldsymbol{f}_1', \cdots, \boldsymbol{f}_n')$ in luogo di $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_2)$, ne derivano invece dei vettori fondamentali di **R** quelli di **R**$'$; ed essendo L un'applicazione lineare, segue che l'immagine di **R** è **R**$'$. Dunque **R** ed **R**$'$ sono identici.

4. Dopo i Lemmi preliminari, passiamo ad alcuni complementi, in vista di ottenere il Teorema principale,

Sia $2n + 1 = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ $(p_1, p_2, \cdots, p_s)$ numeri primi distinti, e sia $g(\alpha)$ il numero delle rappresentazioni additive (essenzialmente distinte) del numero naturale α. *Il numero dei mosaici reticolati (essenzialmente distinti) di dimensione* n *è*

$$f(n) = g(\alpha_1) \cdot g(\alpha_2) \cdots g(\alpha_s)\,. \tag{18}$$

Basta far vedere che, in base alla decomposizione di $2n+1$, esistono gruppi abeliani eteromorfi in numero di $f(n)$; ma quest'affermazione segue immediatamente dal Lemma 3.

Se j è fisso ($j = 1, 2, \cdots, s$) allora il numero delle soluzioni dell'equazione (12) – colla condizione (11) – è $g(\alpha_j)$. Questo è anche il numero dei possibili componenti G_{p_j} del gruppo abeliano G, indicando con G_{p_j} un componente d'ordine $p_j^{\alpha_j}$ (costituito da elementi i cui ordini sono potenze di p_j) –. Siccome in tale scelta i componenti possono essere indipendenti, ne segue la validità della (18).

Osservazioni 2. – Consideriamo la costruzione nella fig. 3. Dove si trova sull'asse appartenente ad $\boldsymbol{e}_k$ il primo punto del reticolo $\mathbf{R}$? Ciò val quanto chiedere il punto di $\mathbf{R}$ che è «il più vicino ad O». L'ordine dell'elemento $\{\boldsymbol{e}_k\}$ ($\in \mathbf{X}/\mathbf{R}$) – come abbiamo visto – fornisce la risposta. La distribuzione «dei primi vertici» dipende dal gruppo $G \cong (\mathbf{X}/\mathbf{R})$. Per esempio consideriamo le distribuzioni nelle Tabelle 1 e 2 per $n = 4$ (fig. 2). Queste sono, nel primo caso, (9, 9, 3, 9) e, nel secondo, (3, 3, 3, 3).

G. Korchmáros nella sua costruzione si limitò al caso in cui la distanza da O di uno dei «primi vertici» sia $2n+1$ (su uno degli assi), ed ottenne la costruzione per via geometrica pura. In detta ipotesi il gruppo fattoriale $\mathbf{X}/\mathbf{R}$ è un gruppo ciclico d'ordine $2n+1$, cioè somma diretta dei gruppi ciclici aventi per ordini $p_1^{\alpha_1}, \cdots, p_k^{\alpha_j}, \cdots, p_s^{\alpha_s}$.

Ritornando alla fig. 3, dalla costruzione discendono le seguenti osservazioni.

Se $2n+1$ non è un numero primo, allora la proiezione di un mosaico reticolato di dimensione n su di uno spazio subordinato di dimensione conveniente può essere un mosaico reticolato di quest'ultimo, dipendentemente dalla forma della somma diretta del gruppo fattoriale $\mathbf{X}/\mathbf{R}$. Per esempio, nella fig. 2 consideriamo la seconda Tabella nel caso $n = 13$. Scegliamo la parte formata dalle righe e colonne di posti 1, 3, 4, 5. Questa parte fornisce la prima Tabella nel caso $n = 4$; sicchè la proiezione della seconda forma di mosaico nello spazio di dimensione 13 sullo spazio subordinato di dimensione 4 sotteso dai vettori ($\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5$) fornisce in quest'ultimo il mosaico della prima forma.

BIBLIOGRAFIA

[1] KÁRTESZI FERENC, *Szemlèletes geometria*, «Gondolat Könyvkiadò» Budapest, 1966.

[2] FRELLER MIKLÓS, *A haromdimenziós euklideszi tér kitöltése egybevágo keresztekkel*, «MTA, III., Oszt. Közleményei», in stampa.

[3] KORCHMÁROS GÀBOR, *Egy n-dimenziós mozaik* (Manoscritto, conseguito un premio dell'Università di Budapest).

[4] F. W. S. CASSELS, *An introduction to the geometry numbers* «Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften», Band 99, Springer Verlag, Berlin Göttingen–Heidelberg 1959.