Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Paolo Dentoni

Funzioni regolari in un'algebra e cambiamenti di base

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **51** (1971), n.5, p. 274–281.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_5_274_0>

Matematica. — *Funzioni regolari in un'algebra e cambiamenti di base* (*). Nota di PAOLO DENTONI, presentata (**) dal Corrisp. E. MARTINELLI.

SUMMARY. — Fueter and Moisil's definition of right regular functions in an algebra A depends on the choice of a basis in A. We determine here the group G of linear transformations (changes of basis in A) which map the set of right regular functions into itself. G is strictly related to the reducibility of A as a direct sum of left ideals, and contains the subgroup G_0 of all similarity transformations with O as a fixed-point. In particular, we show that $G_0 = G$ in the case of quaternion and Clifford algebras.

1. È noto che la definizione di funzione regolare nel senso di G. C. Moisil e R. Fueter dipende dalla base scelta nell'algebra (1). Il problema di determinare i cambiamenti di base che lasciano invariato l'insieme delle funzioni regolari destre (sinistre) è già stato affrontato da G. B. Rizza (2), che è pervenuto a caratterizzare tali cambiamenti di base, mediante una condizione di permutabilità con riferimento alla prima rappresentazione regolare dell'algebra.

In questa Nota il problema viene ripreso, in condizioni più generali, e completamente risolto seguendo una via del tutto diversa, fino alla determinazione del gruppo di trasformazioni lineari che lasciano invariato l'insieme delle funzioni regolari.

In particolare, si trova che *nelle algebre con divisione e nelle algebre di Clifford tale gruppo è isomorfo a quello delle similitudini di un n–spazio euclideo che mutano in sé un punto* (*centro–similitudini*) (C_1, n. 4). Allo stesso risultato si perviene, *nelle algebre irriducibili con unità, quando si richiede che venga conservata sia la regolarità destra che la regolarità sinistra* (C_2, n. 4).

In generale, invece, esso è un gruppo più ampio, *dipendente dalle possibili decomposizioni dell'algebra come somma diretta di suoi ideali sinistri* (*destri*) *e anche dalla base scelta* (T_1, n. 4).

2. Sia A un'algebra di dimensione finita sul campo reale $\mathbf{R}$, V un sottospazio vettoriale n–dimensionale di A, $B = \{ u_1, \cdots, u_n \}$ una base di V. Gli elementi di V si riguardano come punti di uno spazio euclideo reale di dimensione n. Sia poi U un aperto di V e $\mathfrak{R}_d(B)$ l'insieme delle funzioni

(*) Ricerca eseguita nell'ambito del Gruppo G.N.S.A.G.A. del C.N.R. per il 1971.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1971.

(1) Sulla teoria delle funzioni regolari in un'algebra, ved. per esempio G. C. Moisil [5], R. Fueter [3], G. B. Rizza [6]. Un'esposizione recente, con notizie storiche e una ricca bibliografia in V. Iftimie [4].

(2) Ved. G. B. Rizza [7].

$f: U \to A$ regolari a destra in U con riferimento alla base B di V, cioè tali che, per ogni $x = \sum_{h=1}^{n} \xi_h u_h$ in U, risulti

$$Df = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \xi_h} u_h = 0 . \tag{1}$$

Si consideri ora in V un'altra base $B' = \{u'_k\}$ con $u'_k = \sum_{h=1}^{n} \tau_k^h u_h$, e sia $T = (\tau_k^h)$ (k, h denotando rispettivamente righe e colonne) la matrice non degenere associata al cambiamento di base. È utile per il seguito introdurre anche la *trasformazione lineare* di V in sé (associata al cambiamento di base B, B'), che muta ordinatamente gli elementi di B in quelli di B' (3).

Indicata con S la matrice simmetrica $(\sigma^{hr}) = T_{-1} T$ (4), la condizione perché f appartenga a $\mathfrak{R}_d(B')$ può scriversi (5):

$$\sum_{h, r=1}^{n} \sigma^{hr} \frac{\partial f}{\partial \xi_h} u_r = 0 . \tag{2}$$

È utile l'osservazione:

O1 – *La relazione* $\mathfrak{R}_d(B) \subset \mathfrak{R}_d(B')$ *sussiste allora e soltanto allora che per ogni n–pla di elementi $a_h \in A$ soddisfacenti la relazione* $\sum_h a_h u_h = 0$, *risulta* $\sum_{h,r} \sigma^{hr} a_h u_r = 0$.

Una osservazione del tutto analoga alla O1 sussiste scambiando tra loro le basi B, B'. L'enunciato, con riferimento alla base B, è questo:

O2 – *La relazione* $\mathfrak{R}_d(B') \subset \mathfrak{R}_d(B)$ *sussiste allora e soltanto allora che per ogni n–pla di elementi $a_h \in A$ soddisfacenti la relazione* $\sum_{h,r} \sigma^{hr} a_h u_r = 0$, *risulta* $\sum_h a_h u_h = 0$.

Per la necessità di O1, basta considerare la funzione $f(x) = \sum_{h=1}^{n} \xi_h a_h$, tenendo presenti le (1), (2). La sufficienza è immediata.

Discende da O1, O2 la seguente proposizione, che generalizza un'osservazione di G. B. Rizza (6)

P1 – *Le relazioni* $\mathfrak{R}_d(B) \subset \mathfrak{R}_d(B')$ *e* $\mathfrak{R}_d(B') \subset \mathfrak{R}_d(B)$ *sono fra loro equivalenti.*

Infatti, denotato con AV l'ideale sinistro di A generato da V, sia φ la corrispondenza di AV in sé, che ad ogni elemento di AV

$$a = \sum_{h=1}^{n} a_h u_h \qquad (a_h \in A) \tag{3}$$

(3) La matrice della trasformazione lineare è ovviamente T.
(4) L'indice -1 in basso denota trasposizione.
(5) Cfr. G. B. Rizza [7], p. 39.
(6) Ved. G. B. Rizza [7], p. 40.

associa l'elemento

$$\varphi(a) = \sum_{h,r} \sigma^{hr} a_h u_r . \tag{4}$$

Poiché la rappresentazione (3) non è unica, φ riesce in generale a più valori.

Se in particolare $\mathfrak{R}_d(B) \subset \mathfrak{R}_d(B')$, in virtù di O1 che assicura $\varphi(0) = 0$, $\varphi(a)$ risulta indipendente dalle rappresentazioni di a nel sistema di generatori $\{u_h\}$ di AV e pertanto φ riesce univoca. Si verifica poi immediatamente che *φ è un endomorfismo di AV, sia in quanto spazio vettoriale su* **R** *che in quanto modulo sinistro su A*. Inoltre l'endomorfismo φ risulta evidentemente suriettivo, perché gli elementi $\sigma^{hr} u_h$ $(r = 1, \cdots, n)$ costituiscono un altro sistema di generatori per AV. Per un noto risultato (7), φ è allora un *automorfismo* di AV, ossia $\operatorname{Ker} \varphi = 0$. Da O2 segue subito $\mathfrak{R}_d(B') \subset \mathfrak{R}_d(B)$. Analogamente per la parte inversa.

3. Dalla (2) appare chiaro che se $S = T_{-1} T$ è una matrice scalare $(S = \lambda I)$, cioè *se T è la matrice di una centro-similitudine, risulta $\mathfrak{R}_d(B') = \mathfrak{R}_d(B)$*. Come ha notato M. Sce (8) la condizione $S = \lambda I$ *non è però in generale necessaria* perché risultino coincidenti gli insiemi $\mathfrak{R}_d(B')$, $\mathfrak{R}_d(B)$.

Invero, consideriamo una *decomposizione di V* come somma diretta di suoi sottospazi vettoriali V_i $(i = 1, \cdots, m)$, e supponiamo che l'ideale sinistro AV risulti decomponibile nella somma diretta degli *ideali sinistri AV_i* $(i = 1, \cdots, m)$. Supponiamo inoltre che la base $\{u_h\}$ di V sia *compatibile con la decomposizione* di V considerata, cioè che ogni u_h $(h = 1, \cdots, n)$ appartenga ad uno dei sottospazi V_i (9). È utile poi denotare con $\underset{i}{u_h}$ $(i = 1, \cdots, m)$ la componente di u_h appartenente a V_i nella accennata decomposizione di V (10).

In queste condizioni, *se la trasformazione lineare, associata al cambiamento di base in V* (n. 2), *muta in sé ciascun sottospazio V_i, subordinando in esso una centro-similitudine di rapporto λ_i, risulta $\mathfrak{R}_d(B') = \mathfrak{R}_d(B)$.*

Infatti, da $\sum_{h=1}^{n} a_h u_h = 0$ in virtù della decomponibilità di AV discende

$$\sum_{h=1}^{n} a_h \underset{i}{u_h} = 0 \qquad (i = 1, \cdots, m)$$

onde può scriversi

$$\sum_{h,r=1}^{n} a_h \sigma^{hr} u_r = \lambda_1^2 \sum_{h=1}^{n} a_h \underset{1}{u_h} + \cdots + \lambda_m^2 \sum_{h=1}^{n} a_h \underset{m}{u_h} = 0 .$$

(7) Ved. per esempio N. Bourbaki [1], p. 32, Lemme 3. AV ha dimensione finita su **R** e pertanto è noetheriano.

(8) Ved. M. Sce [8], p. 32, nota (8). Cfr. anche G. B. Rizza [7], n. 5.

(9) Un esempio è costituito dal caso $V = A$, composta diretta di due sottoalgebre A_1, A_2 e la base di A unione di una base di A_1 e una base di A_2.

(10) $\underset{i}{u_h} = u_h$ se $u_h \in V_i$; $\underset{i}{u_h} = 0$ se $u_h \notin V_i$.

Da O_1, P_1 segue l'asserto.

Nel seguito, una trasformazione lineare che soddisfi alle precedenti condizioni si dirà una *m–centrosimilitudine di rapporti* $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ *relativa alla decomposizione* $V_1, \cdots, V_m$ *dello spazio* V (11).

4. Il tipo di cambiamento di base considerato alla fine del n. 3 è, a meno di opportune congruenze dello spazio V, il più generale cambiamento di base che lascia invariato l'insieme delle funzioni regolari di V. Sussiste precisamente il Teorema:

T_1 – *Data una base* B *di* V, *le basi* B' *di* V *per le quali risulta* $\mathfrak{R}_d(B') = \mathfrak{R}_d(B)$ *sono tutte e sole quelle che si ottengono da* B *mediante trasformazioni lineari con matrice*

$$T = K^{-1} \tilde{\tilde{T}} H \tag{5}$$

dove $\tilde{\tilde{T}}$ *è la matrice di una m–centrosimilitudine relativa ad una qualunque decomposizione di* V *in sottospazi* V_i *tale che* AV *risulti somma diretta degli ideali sinistri* AV_i; *e* H, K *sono matrici di arbitrarie trasformazioni ortogonali, che mandino rispettivamente le basi* B, B' *in basi compatibili con la decomposizione* $V_1, \cdots, V_m$ *di* V.

Conviene segnalare subito i seguenti corollari di T_1:

C_0 – *Se il sottospazio* V *ammette come unica decomposizione (del tipo indicato nel Teorema* T_1) *quella banale*: $V_1 = V$ $(m = 1)$, *la matrice* T *è la matrice di una centro–similitudine.*

In questo caso infatti $\tilde{\tilde{T}}$ è una centro–similitudine. Inoltre ogni trasformazione lineare ortogonale ha la proprietà richiesta nell'enunciato di T_1.

C_1 – *Se gli elementi non nulli di* V *sono elementi invertibili di* A, *i soli cambiamenti di base in* V *che conservano gli insiemi delle funzioni regolari destre, corrispondono alle centro–similitudini di* V.

Invero, per ogni sottospazio V_i di V, risulta $AV_i = A$ e quindi $AV = A$ onde per $m > 1$ AV non è somma diretta dei sottomoduli AV_i. Dal corollario C_0 discende subito l'asserto.

C_1 si applica in particolare alle *algebre con divisione*, con riferimento ad un qualsiasi sottospazio V; ed anche alle *algebre di Clifford classiche* su un $\mathbf{R}$–modulo M, assumendo $V = M$, oppure $V = \mathbf{R} \cdot 1 + M$ (12).

C_2 – *Sia* A *un'algebra irriducibile e dotata di unità. Allora i soli cambiamenti di base in* A *che conservano tanto gli insiemi* $\mathfrak{R}_d(B)$ *delle funzioni regolari destre, quanto gli insiemi* $\mathfrak{R}_s(B)$ *delle funzioni regolari sinistre, corrispondono alle centro–similitudini di* A.

Alla dimostrazione del corollario C_2 è dedicato il n. 7.

(11) Una 1–centrosimilitudine è ovviamente una centro–similitudine di V.

(12) Sulle Algebre di Clifford, ved. per esempio C. Chevalley [2], Ch. II.

Conviene concludere questo numero con un'osservazione che mostra che l'esistenza di cambiamenti di base B, B' per i quali risulti $\mathfrak{R}_d(B) = \mathfrak{R}_d(B')$ e che diano luogo a trasformazioni lineari diverse dalle centro–similitudini, *dipende, oltre che dalla struttura dell'algebra, anche dalla base B di partenza.*

Invero, tenuto conto della (5), se $V_1, \cdots, V_m$ $(m \geq 2)$ è una decomposizione di V con la proprietà richiesta nel Teorema T1, può accadere che non esistano matrici ortogonali H che mutino B in una base compatibile con la decomposizione; e questo fatto può presentarsi per ogni decomposizione non banale.

5. Per la dimostrazione di T1, basterà limitarsi a provare la *necessità* della condizione ivi considerata. La sufficienza discende infatti dall'osservazione alla fine del n. 3, tenuto presente che i cambiamenti di base definiti dalle matrici ortogonali H, K conservano gli insiemi delle funzioni regolari (n. 3).

Sia dunque $\mathfrak{R}_d(B') = \mathfrak{R}_d(B)$. In un primo momento si consideri il *caso particolare*

$$T_{-1}T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} = T\,T_{-1} \tag{6}$$

con $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n$.

Si denotino poi con $\lambda_1^2 < \cdots < \lambda_m^2$ $(m \leq n)$ gli elementi *distinti* dell'insieme dei numeri positivi $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. Per ogni i $(i = 1, \cdots, m)$ conviene indicare con $\underset{i}{u_h}, \underset{i}{u'_h}$ $(h = 1, \cdots, n)$ l'elemento u_h, u'_h ovvero lo zero di V, a seconda che sia $\alpha_h = \lambda_i^2$ ovvero $\alpha_h \neq \lambda_i^2$.

Ciò premesso, sia V_i il sottospazio vettoriale di V generato dagli elementi $\underset{i}{u_h}$ $(h = 1, \cdots, n)$. Evidentemente risulta

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m \tag{7}$$ (13) (14)

e la base $B = \{u_h\}$ è *compatibile* con questa decomposizione di V (n. 3). Ma risulta anche:

$$AV = AV_1 \oplus \cdots \oplus AV_m \,. \tag{8}$$

Invero, sia $i \neq j$ e $z = \sum_{h=1}^{n} a_h \underset{i}{u_h} = \sum_{h=1}^{n} b_h \underset{j}{u_h}$ un elemento di $AV_i \cap AV_j$. Considerato allora l'*automorfismo* φ dell'A–modulo sinistro AV definito alla

(13) Si noti che nelle considerazioni che conducono alla costruzione della decomposizione (7) intervengono soltanto la coppia di basi B, B' e la condizione (6); non interviene invece l'ipotesi $\mathfrak{R}_d(B') = \mathfrak{R}_d(B)$. Pertanto, anche con riferimento alla *regolarità sinistra*, partendo dalla medesima coppia di basi B, B' *si perviene alla stessa decomposizione di V.*

(14) Il segno $\oplus$ denota somma diretta.

fine del n. 2, tenuta presente la (6), riesce $\varphi(\underset{i}{u_h}) = \lambda_i^2 \underset{i}{u_h}$ onde

$$\varphi(z) = \sum_{h=1}^{n} a_h \, \varphi(\underset{i}{u_h}) = \lambda_i^2 z$$

e analogamente

$$\varphi(z) = \sum_{h=1}^{n} b_h \, \varphi(\underset{j}{u_h}) = \lambda_j^2 z$$

e poiché è $\lambda_i \neq \lambda_j$ risulta $z = 0$. La (8) è dunque stabilita.

Inoltre, dalla (6) segue

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} T = T \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

che si traduce nelle relazioni scalari

$$(\alpha_h - \alpha_k)\, \tau_k^h = 0 \qquad (h, k = 1, \cdots, n).$$

Si conclude senza difficoltà che, per ogni i, risulta

$$\underset{i}{u'_k} = \sum_{h=1}^{n} \tau_k^h \underset{i}{u_h} \qquad (k = 1, \cdots, n),$$

onde $\underset{i}{u'_k} \in V_i$ $(k = 1, \cdots, n)$. In altri termini, anche *la base B' è compatibile con la decomposizione* (7), *e la trasformazione lineare definita da T muta in sé ciascun sottospazio V_i*. Denotate con T_i ed I_i le matrici delle trasformazioni subordinate in V_i dalla T e dalla identità I, dalla (6) segue $(T_i)_{-1} T_i = \lambda_i^2 I_i$ onde *la trasformazione definita da T subordina in ogni V_i una centro–similitudine di rapporto λ_i*.

In conclusione, nell'ipotesi che sussista la (6), il Teorema T1 è dimostrato, assumendo $H = K = I$.

6. Consideriamo ora il caso generale, in cui la condizione (6) non risulti soddisfatta.

Per un noto risultato (15), le matrici $T_{-1}\, T$ e TT_{-1} hanno le stesse *radici caratteristiche* $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ che risultano tutte reali, in quanto entrambe le matrici sono simmetriche (16). Un altro risultato noto (17), assicura poi l'esistenza di due matrici *ortogonali* H, K tali che

$$(9) \qquad H(T_{-1}T)H^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} = K(TT_{-1})K^{-1}.$$

(15) Ved. per esempio J. H. M. Wedderburn [9], p. 25.
(16) Ved. per esempio J. H. M. Wedderburn [9], p. 88.
(17) Ved. per esempio J. H. M. Wedderburn [9], p. 90.

Posto allora

$$\tilde{T} = KTH^{-1},$$

dalla (9) discende

$$\tilde{T}_{-1}\tilde{T} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} = \tilde{T}\tilde{T}_{-1}.$$

In altri termini, la matrice $\tilde{T}$ soddisfa alla condizione (6) del numero precedente (18). Il Teorema T_1 è così completamente dimostrato.

7. Per stabilire il corollario C_2 si procede così. Siano B, B' due basi di $A = V$ e T la matrice della trasformazione. Con il procedimento del n. 6 si costruiscono la matrice $\tilde{T}$, soddisfacente alla condizione (6), e le matrici ortogonali H e K; si applichi poi il procedimento esposto all'inizio del n. 5, che conduce alla *decomposizione* (7):

$$A = V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m. \tag{10}$$

In queste considerazioni preliminari non intervengono ipotesi di regolarità destra, sinistra (19).

Tenuti presenti l'enunciato e la dimostrazione del Teorema T_1, dall'ipotesi $\mathfrak{R}_d(B') = \mathfrak{R}_d(B)$ segue

$$T = K^{-1}\tilde{T}H$$

e

$$AV = AV_1 \oplus \cdots \oplus AV_m. \tag{11}$$

Analogamente, dall'ipotesi $\mathfrak{R}_s(B') = \mathfrak{R}_s(B)$ segue

$$VA = V_1A \oplus \cdots \oplus V_mA. \tag{12}$$

Poiché A è dotata di unità risulta $A = AV = VA$, $V_i \subset AV_i$, $V_i \subset V_iA$, da cui $\dim V_i \leq \dim AV_i$, $\dim V_i \leq \dim V_iA$. Tenuto conto delle (10), (11), (12) si conclude facilmente che riesce anzi $\dim V_i = \dim AV_i = \dim V_iA$ $(i = 1, \cdots, m)$ onde

$$V_i = AV_i = V_iA \qquad (i = 1, \cdots, m).$$

I sottospazi V_i sono quindi *ideali bilateri* di A e pertanto A è composta diretta degli ideali V_i. Ma l'algebra A è supposta *irriducibile*, onde la decomposizione (10) è necessariamente banale ($m = 1$, $A = V_1$). Pertanto $\tilde{T}$, e quindi anche T, è la matrice di una centro-similitudine.

Il corollario C_2 è quindi dimostrato.

(18) Si noti che il procedimento che conduce dalla matrice T alla matrice $\tilde{T}$, soddisfacente la condizione (6), è di carattere puramente algebrico e pertanto rimane inalterato se in luogo di funzioni regolari destre si considerano funzioni regolari sinistre.

(19) Ved. note (13), (18).

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI, *Algèbre*, Ch. 8 (Hermann, Paris, 1958).

[2] C. C. CHEVALLEY, *The algebraic theory of spinors* (Columbia Univ. Press, New York, 1955).

[3] R. FUETER, *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen* $\Delta u = 0$ *und* $\Delta\Delta u = 0$ *mit vier reellen Variablen*, «Comm. Math. Helvetici», 7, 307–330 (1934–35).

[4] V. IFTIMIE, *Fonctions Hypercomplexes*, « Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie », 9, 279–332 (1965).

[5] G. C. MOISIL, *Sur les quaternions monogènes*, « Bull. Sci. Math. Paris » (2), *55*, 168–174 (1931).

[6] G. B. RIZZA, *Sulle funzioni analitiche nelle algebre ipercomplesse*, « Comm. Pont. Ac. Sci. », *14*, 169–194 (1950).

[7] G. B. RIZZA, *Sulle condizioni di regolarità delle funzioni in un'algebra*, « Rend. Lincei » (8), *20*, 38–43 (1956).

[8] M. SCE, *Monogeneità e totale derivabilità nelle algebre reali e complesse*, I. « Rend. Lincei » (8), *16*, 30–35 (1954).

[9] J. H. M. WEDDERBURN, *Lectures on matrices* (A.M.S. Colloquium Publ., New York, 1934).