Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mauro Picone

Sugli intervalli oscillatorii di alcune variabili reali ordinate

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **51** (1971), n.5, p. 301–304.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_5_301_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1971.

Analisi matematica. — *Sugli intervalli oscillatorii di alcune variabili reali ordinate.* Nota [(*)] del Socio MAURO PICONE.

SUMMARY. — In considering a pair of ordered real variables (such as appears in fundamental chapters of most treatises of infinitesimal analysis), it is shown that the oscillation interval of one of the two variables is always completely contained in the oscillation interval of the other variable.

Com'è ben noto, dagli elementi, ogni variabile reale *ordinata* x [(1)] è dotata di un ben determinato *limite inferiore*, che indicherò col simbolo

$$\lim{}' x ,$$

il quale può essere un numero, $-\infty$ o $+\infty$ e di un ben determinato *limite superiore*, che indicherò col simbolo

$$\lim{}'' x ,$$

il quale, del pari, può essere un numero, $-\infty$ o $+\infty$, avendosi sempre

$$\lim{}' x \leqq \lim{}'' x . \tag{1}$$

La variabile ordinata x dicesi *regolare* se nella (1) vale il segno $=$ e *convergente* se $\lim x'$ e $\lim'' x$ coincidono in un numero, *divergente positivamente* se $\lim' x = \lim'' x = +\infty$, *divergente negativamente* se $\lim' x = \lim'' x = -\infty$.

Se la variabile reale ordinata x non è regolare, l'intervallo che ha per estremo inferiore $\lim' x$ e per estremo superiore $\lim'' x$, sarà qui chiamato, adoperando un'espressiva locuzione del Dini, l'*intervallo oscillatorio* della variabile, inquantoché, allora, comunque si assegni un intervallo (a, b) $(a < b)$ *interno* all'intervallo $(\lim' x, \lim'' x)$ la variabile non si manterrà definitivamente minore o eguale a b, né maggiore o eguale ad a, cioè essa passerà incessamente da valori minori di a a valori maggiori di b e viceversa, mentre se $\lim'' x < +\infty$, essa è definitivamente minore di ogni prefissato numero maggiore di $\lim'' x$ e se $\lim' x > -\infty$ è definitivamente maggiore di ogni prefissato numero minore di $\lim' x$, e quindi, se, per esempio, è $\lim' x > -\infty$ e $\lim'' x < +\infty$, la variabile x è definitivamente contenuta in ogni intervallo al quale sia interno il suo intervallo oscillatorio.

Tutto ciò è notissimo ed elementare. Ma ho voluto richiamarlo nel tentativo di rendere chiaro e privo di equivoci, quanto a me è possibile, il presente scritto.

(*) Presentata nella seduta del 13 novembre 1971.

(1) Per una precisa definizione di *variabile reale ordinata*, vedasi il n. 26 del I Volume del *Trattato di Analisi Matematica* di Picone e Fichera [Editore Tumminelli, Roma (1954)].

Date due variabili reali ordinate x e y, dirò che la *y domina* la x o è *dominante* la x, se l'intervallo oscillatorio della y contiene quello della x, se, cioè, riesce:

$$\lim{}' y \leqq \lim{}' x \leqq \lim{}'' x \leqq \lim{}'' y .$$

Ovviamente, se la variabile y domina la variabile x, la regolarità della prima ha di conseguenza la regolarità della seconda e l'eguaglianza dei loro limiti.

Nel citato trattato di Picone e Fichera [loc. cit. (1)] al n. 64 del primo volume trovasi un insolito enunciato del teorema di L'Ospital, relativo al limite del rapporto di due funzioni reali e derivabili, di una medesima variabile reale x, in un punto x_0, al finito o all'infinito, nel quale le funzioni sono entrambe infinitesime o entrambe infinitamente grandi, a norma del quale enunciato, la variabile rapporto delle derivate di tali funzioni è dominante, per $x \to x_0$, quello delle funzioni.

Scopo della Nota presente, di carattere elementare, è di considerare, ancora una volta, le coppie di successioni numeriche, di solito studiate nei primi capitoli dei trattati di Analisi matematica, per stabilire che, nelle ipotesi contemplate, una di queste domina l'altra, ciò che, a mio avviso, arricchisce notevolmente il contenuto delle proposizioni fondamentali di quella potente disciplina.

1. Le successioni di Cesàro

I. *Se* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *sono due successioni entrambe infinitesime di numeri reali e* $\{y_n\}$ *è crescente o decrescente, la successione*

$$\left\{ \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} \right\} \tag{2}$$

è dominante la successione

$$\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} . \tag{3}$$

Dimostrazione. – Possiamo evidentemente limitarci a considerare il caso in cui la successione $\{y_n\}$ sia decrescente e a dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty}{}'' \frac{x_n}{y_n} \leqq \lim_{n\to\infty}{}'' \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} \tag{4}$$

e ciò occorre fare soltanto quando sia

$$\lim_{n\to\infty}{}'' \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} < +\infty , \tag{5}$$

nel qual caso, basta far vedere che, se, per un numero b, risulta

$$\frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} \leqq b , \qquad \text{per} \quad n > n_b , \tag{6}$$

sarà anche

$$\frac{x_n}{y_n} \leqq b , \qquad \text{per} \quad n > n_b . \tag{7}$$

Verificandosi la (6), si ha, comunque si fissi un numero positivo ν,

$$x_{n+i} - x_{n+i+1} \leq b\,(y_{n+i} - y_{n+i+1})\,, \qquad \text{per} \quad i = 0\,, 1\,, \cdots, \nu\,,$$

donde, sommando membro a membro, tali disuguaglianze,

$$x_n - x_{n+\nu+1} \leqq b\,(y_n - y_{n+\nu+1})\,,$$

e quindi, passando al limite per $\nu \to +\infty$,

$$x_n \leqq b y_n\,, \qquad \text{per} \quad n > n_b\,,$$

donde, data la positività delle y_n, la (7).

II. *Se $\{x_n\}$ è un'arbitraria successione di numeri reali e $\{y_n\}$ è una successione di numeri positivi (negativi) che diverge positivamente (negativamente) crescendo (decrescendo) la successione* (2) *è dominante la successione* (3).

Dimostrazione. – Nell'ipotesi secondo cui $\{y_n\}$ è una successione crescente di numeri positivi, dalle

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \leqq b\,, \qquad \text{per} \quad n > n_b\,,$$

segue, per qualsivoglia intero ν,

$$x_{n+\nu+1} - x_n \leqq b\,(y_{n+\nu+1} - y_n)$$

donde

$$\frac{x_{n+\nu+1}}{y_{n+\nu+1}} - \frac{x_n}{y_{n+\nu+1}} \leqq b\left(1 - \frac{x_n}{y_{n+\nu+1}}\right),$$

e quindi passando al limite per $\nu \to +\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}{}'' \frac{x_n}{y_n} = \lim_{\nu\to\infty}{}'' \frac{x_{n+\nu+1}}{y_{n+\nu+1}} \leqq b\,.$$

Caso particolare del Teorema ora dimostrato, a cui si perviene ponendo $y_n = n$, è il seguente:

III. *Per un'arbitraria successione di numeri reali $\{x_n\}$, la successione $\{x_{n+1} - x_n\}$ è dominante la successione $\{x_n/n\}$.*

Se, per un'arbitraria successione $\{y_n\}$ di numeri positivi, si pone $x_n = \log y_n$, ne segue che la successione $\left\{\log \frac{y_{n+1}}{y_n}\right\}$ è dominante la successione $\left\{\log \sqrt[n]{y_n}\right\}$, e quindi il Teorema:

IV. *Per un'arbitraria successione di numeri positivi $\{x_n\}$, la successione $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ è dominante la successione, $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}$.*

Dai Teoremi III e IV segue che:

V. *Per la più arbitraria successione $\{x_n\}$ di numeri reali, se l'insieme dei numeri x_n è limitato, l'intervallo oscillatorio della successione $\{x_{n+1} - x_n\}$ contiene lo zero. Per la più arbitraria successione $\{x_n\}$ di numeri positivi, se l'insieme del numeri x_n è limitato, l'intervallo d'oscillazione della successione $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ contiene l'unità.*

2. Teoremi delle medie

Sostituendo, nel Teorema III, x_n con la somma $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ e, nel Teorema IV, col prodotto $x_1 x_2 \cdots x_n$, si ottengono i seguenti sulle medie aritmetica o geometrica.

VI. *Una qualsivoglia successione* $\{x_n\}$ *di numeri reali è dominante quella della medie aritmetiche*:

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right\}.$$

VII. *Una qualsivoglia successione* $\{x_n\}$ *di numeri reali e positivi è dominante quella delle medie geometriche*:

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}.$$

Porrò termine al presente scritto dimostrando il seguente Teorema.

VIII. *Indichino* x *un punto dello spazio euclideo* S, *ad un numero arbitrario di dimensioni, e* $f(x)$ *una funzione reale arbitraria quasi continua* (*nel senso di Tonelli*) *in tutto* S, *sommabile in ogni insieme lebesghiano* T *di* S, *supposto di misura finita, si ha allora che la variabile*

$$f(x), \quad \text{per} \quad x \to \infty \ (\text{su S}),$$

è dominante la variabile

$$\frac{1}{\text{mis T}} \int_{\text{T}} f(x)\, d\text{T}, \quad \text{per} \quad \text{T} \to \text{S},$$

mantenendosi T *di misura finita.*

Dimostrazione. – Supposto che, per un numero b, risulti:

$$f(x) \leqq b, \quad \text{per} \quad |x| > r_b,$$

cioè, per x esterno ad un'ipersfera Σ_b, dello spazio S, con centro nell'origine, di raggio r_b, si avrà, per $\text{T} \supset \Sigma_b$,

$$\frac{1}{\text{mis T}} \int_{\text{T}} f(x)\, d\text{T} = \frac{1}{\text{mis T}} \int_{\Sigma_b} f(x)\, d\text{T} + \frac{1}{\text{mis T}} \int_{\text{T}-\Sigma_b} f(x)\, d\text{T} \leqq$$

$$\frac{1}{\text{mis T}} \int_{\Sigma_b} f(x)\, d\text{T} + \frac{b \,\text{mis}(\text{T} - \Sigma_b)}{\text{mis T}},$$

donde

$$\lim_{\text{T}\to\text{S}}{}'' \left(\frac{1}{\text{mis T}} \int_{\text{T}} f(x)\, d\text{T}\right) \leqq b.$$