Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Cataldo Agostinelli

Sui potenziali termoelastici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **51** (1971), n.5, p. 359–366.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_5_359_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1971.

Termoelasticità. — *Sui potenziali termoelastici.* Nota [*] del Socio CATALDO AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In this paper the Author considers a differential equation that appeared in a previous work on the theory of thermoelasticity and he assigns a new form of potential functions for its integration.

1. In due Note precedenti pubblicate in questi Rendiconti [1], e in una Memoria in corso di stampa nella Rivista « Meccanica » [2], considerando il problema della propagazione di onde termoelastiche in un mezzo omogeneo isotropo, sono stato indotto alla considerazione dell'equazione differenziale

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - x^2\,\Delta_2\right)\Psi = \frac{\gamma}{\rho\lambda_T}\,Q \tag{1}$$

nell'incognita Ψ. In essa Δ_2 è l'operatore di Laplace; Q è la quantità di calore generato dalle sorgenti nell'unità di tempo e per unità di volume, distribuite con continuità in una regione *S* del mezzo elastico; $k = \lambda_T/C_\varepsilon\,\rho$, essendo λ_T il *coefficiente di conduttività termica*, C_ε *il calore specifico a deformazione costante*, ρ la densità del mezzo; la costante γ è uguale a $(3\,\lambda + 2\,\mu)\,\alpha$, dove λ e μ sono le costanti di Lamé ed α è il coefficiente di dilatazione termica lineare; infine $a^2 = (\lambda + 2\,\mu)/\rho$ è il quadrato della velocità delle onde elastiche pure longitudinali.

Per l'integrazione di quella equazione mi ero servito di nuove *funzioni potenziali* che avevo chiamate *termoelastiche*.

2. In questa Nota mi propongo ora di assegnare una nuova forma più espressiva di dette funzioni potenziali.

Per questo incominciamo a considerare l'equazione

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\,\Delta_2\right)\Delta_2\,v = 0\,, \tag{2}$$

e osserviamo che due soluzioni di questa equazione, funzioni della distanza *r* di un punto *P* da un punto *M* variabile nel volume *S* e del

(*) Presentata nella seduta del 13 novembre 1971.

(1) C. AGOSTINELLI, *Sulla propagazione di onde termoelastiche in un mezzo omogeneo isotropo.* Note I e II. « Rendiconti dell'Accademia Naz. dei Lincei », *50*, 1° sem., fasc. 2 e 3 (1971).

(2) C. AGOSTINELLI, *Sulla teoria della termoelasticità e su alcuni recenti contributi.* « Meccanica », giornale dell'A.I.M.E.T.A., Vol. 6, N. 4 (1971).

tempo t, sono [3]

$$(3)\qquad \begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{r}\int_0^r \mathrm{d}r \int_0^r \Phi_1\left(\mathrm{M}\,,t-\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}r \quad , \quad \left[\Delta_2 v_1 = \frac{1}{r}\,\Phi_1\left(\mathrm{M}\,,t-\frac{r}{a}\right)\right] \\ v_2 &= \frac{1}{r}\int_0^r \mathrm{d}r \int_0^r \Phi_2\left(\mathrm{M}\,,t+\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}r \quad , \quad \left[\Delta_2 v_2 = \frac{1}{r}\,\Phi_2\left(\mathrm{M}\,,t+\frac{r}{a}\right)\right], \end{aligned}$$

con Φ_1 e Φ_2 funzioni arbitrarie degli argomenti indicati fra parentesi. Consideriamo inoltre l'equazione

$$(4)\qquad \left(\Delta_2 - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta_2 v_3 = 0\,,$$

la quale, in base alla teoria del calore, porge l'integrale

$$(5)\qquad \Delta_2 v_3 = \frac{1}{r\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\,(\mathrm{M}\,,r+2\,u\sqrt{kt}\,)\,e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\,,$$

con φ funzione arbitraria dell'argomento $r+2\,u\sqrt{kt}$, e di M; quindi

$$(6)\qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{r}\int_0^r \mathrm{d}r\int_0^r \mathrm{d}r\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\,(\mathrm{M}\,,r+2\,u\sqrt{kt}\,)\,e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

Introducendo per semplicità gli operatori

$$(7)\qquad \nabla_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\,\Delta_2 \quad , \quad \nabla_k = \Delta_2 - \frac{1}{k}\,\frac{\partial}{\partial t}\,,$$

si ricava dalla (3_1)

$$\begin{aligned} \nabla_a v_1 &= \frac{1}{r}\int_0^r \mathrm{d}r\int_0^r \frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\Phi_1\left(\mathrm{M}\,,t-\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}r - \frac{a^2}{r}\,\Phi_1\left(\mathrm{M}\,,t-\frac{r}{a}\right) = \\ &= \frac{a^2}{r}\int_0^r \mathrm{d}r\int_0^r \frac{\partial^2}{\partial r^2}\,\Phi_1\left(\mathrm{M}\,,t-\frac{r}{a}\right) - \frac{a^2}{r}\,\Phi_1\left(\mathrm{M}\,,t-\frac{r}{a}\right) = \\ &= \frac{a^2}{r}\int_0^r \left[\frac{\partial}{\partial r}\,\Phi_1\left(\mathrm{M}\,,t-\frac{r}{a}\right) - \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)_{r=0}\right]\mathrm{d}r - \frac{a^2}{r}\,\Phi_1\left(\mathrm{M}\,,t-\frac{r}{a}\right), \end{aligned}$$

cioè

$$(8)\qquad \nabla_a v_1 = -\frac{a^2}{r}\,\Phi_1\,(\mathrm{M}\,,t) + a\Phi_1'\,(\mathrm{M}\,,t)\,,$$

dove l'apice indica derivazione rispetto al tempo.

(3) Cfr. C. SOMIGLIANA, *Sui potenziali ritardati*, « Rendiconti Circolo Matematico di Palermo », *25* (1908).

Analogamente

$$\nabla_a v_2 = -\frac{a^2}{r}\Phi_2(\mathrm{M}, t) - a\Phi_2'(\mathrm{M}, t). \tag{9}$$

Dalle (8) e (9) segue

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_a v_1 &= \frac{a^2}{kr}\Phi_1'(\mathrm{M}, t) - \frac{a}{k}\Phi_1''(\mathrm{M}, t) \\ \nabla_k \nabla_a v_2 &= \frac{a^2}{kr}\Phi_2'(\mathrm{M}, t) + \frac{a}{k}\Phi_2''(\mathrm{M}, t). \end{aligned} \tag{10}$$

Dalla (6) si ha ora

$$\nabla_k v_3 = \frac{1}{r\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\mathrm{M}, r + 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du - \tag{11}$$

$$-\frac{1}{k\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{r}\int_0^r dr\int_0^r dr\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathrm{M}, r + 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du.$$

Ma

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathrm{M}, r + 2u\sqrt{kt}) = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\sqrt{\frac{k}{t}}\cdot u$$

e con una integrazione per parti si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\, e^{-u^2}\, u\, du = \sqrt{kt}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\, e^{-u^2}\, du.$$

Ne segue

$$\frac{1}{r}\int_0^r dr\int_0^r dr\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathrm{M}, r + 2u\sqrt{kt})\cdot e^{-u^2}\, du =$$

$$= \frac{k}{r}\int_0^r dr\int_0^r dr\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\varphi(\mathrm{M}, r + 2u\sqrt{kt})\cdot e^{-u^2}\, du =$$

$$= k\left\{\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\mathrm{M}, r + 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du - \frac{1}{r}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\mathrm{M}, 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'(\mathrm{M}, 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du\right\}.$$

Qui l'apice indica derivazione rispetto all'argomento $\xi = 2u\sqrt{kt}$.

La (11) porge pertanto

$$\nabla_k v_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\mathrm{M}, 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du + \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'(\mathrm{M}, 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du\right\} \tag{12}$$

e applicando a questa l'operatore ∇_a si ottiene

$$\nabla_a \nabla_k v_3 = \nabla_k \nabla_a v_3 = \tag{13}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(M, 2u\sqrt{kt}) e^{-u^2} du + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(M, 2u\sqrt{kt}) e^{-u^2} du \right\}.$$

Sommando le (10) e (13) abbiamo

$$\nabla_k \nabla_a (v_1 + v_2 + v_3) = \frac{a^2}{kr} \Phi_1'(M, t) - \tag{14}$$

$$- \frac{a}{k} \Phi_1''(M, t) + \frac{a^2}{kr} \Phi_2'(M, t) + \frac{a}{k} \Phi_2''(M, t) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(M, 2u\sqrt{kt}) e^{-u^2} du + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(M, 2u\sqrt{kt}) e^{-u^2} du \right\}.$$

Se ora vogliamo che sia

$$\nabla_k \nabla_a (v_1 + v_2 + v_3) \equiv \left(\Delta_2 - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2\right) (v_1 + v_2 + v_3) = 0, \tag{15}$$

dobbiamo porre

$$\frac{a^2}{k} [\Phi_1'(M, t) + \Phi_2'(M, t)] + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(M, 2u\sqrt{kt}) e^{-u^2} du = 0$$

$$\frac{a}{k} [\Phi_2''(M, t) - \Phi_1''(M, t)] + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(M, 2u\sqrt{kt}) e^{-u^2} du = 0,$$

e quindi

$$\begin{aligned} &\Phi_1(M, t) + \Phi_2(M, t) + \frac{k}{a^2\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(M, 2u\sqrt{kt}) e^{-u^2} du = 0 \\ &\Phi_2(M, t) - \Phi_1(M, t) + \frac{k}{a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(M, 2u\sqrt{kt}) e^{-u^2} du = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

dalle quali si ricava

$$\begin{aligned} \Phi_1(M, t) &= -\frac{k}{2a^2\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(M, 2u\sqrt{kt}) e^{-u^2} du + \\ &\quad + \frac{k}{2a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(M, 2u\sqrt{kt}) e^{-u^2} du \\ \Phi_2(M, t) &= -\frac{k}{2a^2\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(M, 2u\sqrt{kt}) e^{-u^2} du - \\ &\quad - \frac{k}{2a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(M, 2u\sqrt{kt}) e^{-u^2} du. \end{aligned} \tag{17}$$

3. Ciò premesso assumeremo per la funzione Ψ soddisfacente alla (1) il valore

$$\Psi = V_1 + V_2 + V_3 = \int_S (v_1 + v_2 + v_3)\, dS = \tag{18}$$

$$= \int_S \frac{dS}{r} \int_0^r dr \int_0^r dr \left\{ \Phi_1\left(M\,, t - \frac{r}{a}\right) + \Phi_2\left(M\,, t + \frac{r}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(M\,, r + 2\,u\,\sqrt{kt}\,\right) e^{-u^2}\, du \right\}$$

essendo

$$V_i = \int_S v_i\, dS\,, \qquad (i = 1\,, 2\,, 3)\,, \tag{19}$$

e dove l'integrazione è estesa al volume S descritto dal punto M. Poiché le funzioni v_i definite dalle (3) e (6) sono regolari per $r \to 0$, in virtù delle (8), (9) e (12) abbiamo le relazioni

$$\begin{aligned}
\nabla_a V_1 &= \int_S \nabla_a v_1 \cdot dS = \int_S \left\{ -\frac{a^2}{r}\, \Phi_1(M\,, t) + a\Phi_1'(M\,, t) \right\} dS \\
\nabla_a V_2 &= \int_S \nabla_a v_2 \cdot dS = \int_S \left\{ -\frac{a^2}{r}\, \Phi_2(M\,, t) - a\Phi_2'(M\,, t) \right\} dS \\
\nabla_k V_3 &= \int_S \nabla_k v_3\, dS = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_S \frac{dS}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(M\,, 2\,u\,\sqrt{kt}\,\right) e^{-u^2}\, du \,+ \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_S dS \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'\left(M\,, 2\,u\,\sqrt{kt}\,\right) e^{-u^2}\, du\,,
\end{aligned} \tag{20}$$

che sono valide in tutto lo spazio.

Dalle (20), applicando il teorema di Poisson, si deduce che nei punti P interni al volume S risulta

$$\nabla_k \nabla_a V_1 = 4\,\pi a^2\, \Phi_1(P, t) + \frac{a^2}{k} \int_S \Phi_1'(M\,, t)\, \frac{dS}{r} - \frac{a}{k} \int_S \Phi_1''(M\,, t)\, dS$$

$$\nabla_k \nabla_a V_2 = 4\,\pi a^2\, \Phi_2(P, t) + \frac{a^2}{k} \int_S \Phi_2'(M\,, t)\, \frac{dS}{r} + \frac{a}{k} \int_S \Phi_2''(M\,, t)\, dS$$

$$\nabla_a \nabla_k V_3 = \nabla_k \nabla_a V_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_S \frac{dS}{r}\, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(M\,, 2\,u\,\sqrt{kt}\,\right) e^{-u^2}\, du \,+ \right.$$

$$\left. + 4\,\pi a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(P, 2\,u\,\sqrt{kt}\,\right) e^{-u^2}\, du + \int_S dS\, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'\left(M\,, 2\,u\,\sqrt{kt}\,\right) e^{-u^2}\, du \right\}$$

e quindi

$$\nabla_k \nabla_a (V_1+V_2+V_3) = 4\,\pi a^2 \left\{ \Phi_1(P,t) + \Phi_2(P,t) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(P, 2\,u\,\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du \right\} +$$

$$+ \int_S dS \left\{ \frac{a^2}{kr} \Phi_1'(M,t) - \frac{a}{k} \Phi_1''(M,t) + \frac{a^2}{kr} \Phi_2'(M,t) + \frac{a}{k} \Phi_2''(M,t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(M, 2\,u\,\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(M, 2\,u\,\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du \right\},$$

cioè, tenendo conto delle (16), e ricordando la (18), abbiamo

$$\nabla_k \nabla_a \Psi = 4\,a^2 \sqrt{\pi} \left\{ -\frac{k}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(P, 2\,u\,\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du + \right. \tag{21}$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(P, 2\,u\,\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du \right\}.$$

Confrontando con la (1), che si può scrivere semplicemente

$$\nabla_k \nabla_a \Psi = \frac{\gamma}{\rho \lambda_T} Q(P,t), \tag{1'}$$

si ha che la funzione Ψ espressa dalla (18), nei punti P interni al volume S soddisfa a questa equazione, se la funzione φ è tale che

$$-4\,a^2 \sqrt{\pi} \left\{ \frac{k}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(P, 2\,u\,\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du - \right. \tag{22}$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(P, 2\,u\,\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du \right\} = \frac{\gamma}{\rho \lambda_T} Q(P,t).$$

Posto

$$g(P,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(P, 2\,u\,\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du, \tag{23}$$

l'equazione (22) si può scrivere

$$\frac{\partial}{\partial t} g(P,t) - \frac{a^2}{k} g(P,t) = -\frac{\gamma}{4\,k\sqrt{\pi}\,\rho\lambda_T} Q(P,t), \tag{24}$$

che porge facilmente la funzione g, e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(P, 2\,u\,\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du = -\frac{\gamma}{4\,k\sqrt{\pi}\,\rho\lambda_T} e^{(a^2/k)t} \int_0^t e^{-(a^2/k)t} Q(P,t)\, dt. \tag{25}$$

Concludendo si ha: *Determinata la funzione* φ *mediante l'inversione dell'integrale* (25), *la funzione* Ψ *espressa dalla* (18), *dove le funzioni* Φ_1 *e* Φ_2 *sono date dalle* (17), *nei punti interni al volume S verifica l'equazione* (1), *mentre nei punti esterni, ove è* $Q = 0$, *verifica l'equazione omogenea corrispondente.*

È opportuno osservare che nei lavori citati in (1) e (2) la questione era stata ridotta a determinare una funzione $f(\mathrm{P}, 2u\sqrt{kt})$ tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{P}, 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{\gamma}{\rho\lambda_\mathrm{T}} Q(\mathrm{P}, t).$$

In questo nuovo procedimento in virtù della (25) la funzione φ è legata alla funzione f dalla relazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathrm{P}, 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du = \frac{1}{k} e^{(a^2/k)t} \int_0^t e^{-(a^2/k)t}\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{P}, 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du$$

e reciprocamente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{P}, 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du = k \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathrm{P}, 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du -$$

$$- a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathrm{P}, 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du.$$

Osserviamo ancora che il primo membro dell'equazione (25) è diverso da zero per φ funzione pari di u, e quindi funzione pari dell'argomento $2u\sqrt{kt}$. In tal caso la $\varphi'(\mathrm{M}, 2u\sqrt{kt})$ è funzione dispari dell'argomento $2u\sqrt{kt}$, l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(\mathrm{M}, 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du$, è identicamente nullo e le (17) porgono più semplicemente

$$\Phi_1(\mathrm{M}, t) = \Phi_2(\mathrm{M}, t) = -\frac{k}{2a^2\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathrm{M}, 2u\sqrt{kt})\, e^{-u^2}\, du,$$

cioè per la (25)

$$\Phi_1(\mathrm{M}, t) = \Phi_2(\mathrm{M}, t) = \frac{\gamma}{8a^2\pi\rho\lambda_\mathrm{T}} \frac{\partial}{\partial t} e^{(a^2/k)t} \int_0^t e^{-(a^2/k)t} Q(\mathrm{M}, t)\, dt,$$

che dà direttamente i valori delle funzioni Φ_1 e Φ_2 per mezzo del calore Q generato dalle sorgenti.

La (18) diventa infine

$$\Psi = \int_S \frac{dS}{r} \int_0^r dr \int_0^r dr \left\{ \frac{\gamma}{8\, a^2 \pi \rho \lambda_T} \frac{\partial}{\partial t} \left[e^{\frac{a^2}{k}\left(t - \frac{r}{a}\right)} \int_0^{t-(r/a)} e^{-(a^2/k)\tau}\, Q\,(M\,,\,\tau)\, d\tau + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \, e^{\frac{a^2}{k}\left(t + \frac{r}{a}\right)} \int_0^{t+(r/a)} e^{-(a^2/k)\tau}\, Q\,(M\,,\,\tau)\, d\tau \right] + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\,(M\,, r + 2\,u\,\sqrt{kt}\,)\, e^{-u^2}\, du \right\},$$

che ha una forma analoga a un potenziale newtoniano di volume e può essere chiamato *potenziale termoelastico*. In essa la funzione φ è definita in termini del calore Q delle sorgenti, dall'inversione dell'integrale (25).