Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Silvano Matarasso

Esistenza ed unicità delle soluzioni del problema esterno di Dircklet per le equazioni ellittiche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.2, p. 132–140.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_2_132_0>

Analisi matematica. — *Esistenza ed unicità delle soluzioni del problema esterno di Dirichlet per le equazioni ellittiche* (*). Nota I di

SILVANO MATARASSO, presentata (**) dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — We give notice of an existence Theorem and prove a new unicity Theorem for the problem in the title.

In un lavoro in corso di stampa in « Ricerche di Matematica », *21*, ho dimostrato alcuni Teoremi di esistenza delle soluzioni del problema esterno di Dirichlet per un'equazione ellittica di ordine superiore a coefficienti reali, indicando anche talune condizioni sotto le quali vale il Teorema di unicità.

In questa Nota dò notizia, con qualche perfezionamento, di uno dei risultati di [3] e approfondisco poi la questione dell'unicità enunciando e dimostrando un nuovo Teorema in proposito.

In una Nota successiva dallo stesso titolo, dopo aver dato alcuni esempi, dimostrerò un Teorema di alternativa e un altro Teorema relativo all'esistenza e unicità di soluzioni aventi un assegnato comportamento polinomiale all'infinito.

1. NOTAZIONI ED IPOTESI (1).

Sia Ω un aperto di S_n, complementare di un dominio limitato di classe $A^{(h)}$ con h da precisarsi in seguito.

Posta l'origine nel complementare di $\overline{\Omega}$, con $|x|$ indicheremo la distanza di $x = (x_1, \cdots, x_n)$ dall'origine e con Σ_R la sfera di centro l'origine e raggio R; supporremo $R > R_0$ ove $2 R_0$ è il diametro del complementare di $\overline{\Omega}$.

Assegnamo la forma bilineare a coefficienti reali

$$(1.1) \qquad B[\varphi, \varphi] = \sum_{|\alpha|, |\beta|}^{0,m} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega a_{\alpha\beta} D^\alpha \varphi D^\beta \varphi \, dx, \qquad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Supporremo che gli $a_{\alpha\beta}$ con $|\alpha| = |\beta| = m$, siano continui in $\overline{\Omega}$ e convergenti all'infinito; inoltre

$$(1.2) \qquad a_{\alpha\beta}(x) = O(|x|^{\gamma(|\alpha|+|\beta|-2m)-\gamma\eta_{\alpha\beta}}), \qquad |\alpha| + |\beta| < 2m$$

con $\eta_{\alpha\beta} \geq 0$, $0 \leq \gamma \leq 1$. Porremo $\eta^* = \min \eta_{\alpha\beta}$.

(*) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1972.

(1) Per tutte le notazioni non esplicitamente definite, ci riferiamo a [6].

Si abbia inoltre per valori di p che saranno in seguito precisati

$$(1.3)_p \qquad a_{\alpha\beta} \begin{cases} \in C^{|\alpha|+p} & |\alpha| > 0 \\ \in C^{1+p} & |\alpha| = 0 \end{cases}$$

$$(1.3)_p^* \qquad a_{\alpha\beta} \begin{cases} \in C^{|\beta|+p} & |\beta| > 0 \\ \in C^{1+p} & |\beta| = 0 . \end{cases}$$

La forma B sarà supposta uniformemente ellittica in $\overline{\Omega}$; e cioè posto

$$\sum_{\alpha+\beta=\mu} a_{\alpha\beta}(x) = a_\mu(x), \qquad |\mu| = 2m$$

si ha

$$\sum_{|\mu|=2m} a_\mu(x)\, \xi^\mu > c_1 |\xi|^{2m}, \qquad c_1 > 0$$

ove $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ e $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$.

Supporremo poi che:

A) esiste un numero reale θ tale che si abbia $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$(1.4) \qquad \int_\Omega |x|^{-2m\theta} \varphi^2 \, dx + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega (D^\alpha \varphi)^2 \, dx \leq c_2 (-1)^m \, B[\varphi, \varphi],$$

con c_2 indipendente dal diametro del supporto di φ.

Assegnamo su $\partial\Omega$ le funzioni ψ_i di classe $C^{m-1-i,\mu}(\partial\Omega)$, $0 \leq i \leq m-1$, $\mu > \frac{1}{2}$ e poniamo

$$\Phi_0 = \sum_{i=0}^{m-1} \max_{\partial\Omega} |\psi_i| \quad , \quad \Phi_{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} \max_{\partial\Omega} \left| \frac{d^{m-1-i} \psi_i}{ds^{m-1-i}} \right|$$

$$\Phi_{m-1,\mu} = \sum_{i=0}^{m-1} \left[\frac{d^{m-1-i} \psi_i}{ds^{m-1-i}} \right]_\mu^{\partial\Omega}$$

ove $\left[\frac{d^{m-1-i} \psi_i}{ds^{m-1-i}} \right]_\mu^{\partial\Omega}$ indica il coefficiente di Hölder di esponente μ, su $\partial\Omega$, della funzione indicata in parentesi.

Poniamo ancora

$$(1.5) \qquad F[\varphi, f] = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f_\alpha \, D^\alpha \varphi \, dx, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

con f_α misurabile in Ω e soddisfacente la condizione

$$f_\alpha(x) = \mathrm{O}\left(|x|^{\chi_\alpha}\right), \qquad |\alpha| \leq m \tag{1.6}$$

ove

$$\chi_\alpha \begin{cases} = \min\left\{\theta(|\alpha| - m) - \frac{n}{2} - a \,,\, m(\theta - \gamma) + \gamma\left(|\alpha| - m - \frac{n}{2}\right)\right\}, & \forall\theta \leq 1 \\ = |\alpha| - \theta m - \frac{n}{2} - a\,, & \forall\theta > 1, \end{cases}$$

con a numero positivo fissato. Porremo poi

$$\mathrm{H}(f, \Omega) \begin{cases} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega f_\alpha^2 |x|^{2\theta(m-|\alpha|)} \, \mathrm{d}x\right)^{1/2}, & \forall\theta \leq 1 \\ = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega f_\alpha^2 |x|^{2\theta m - 2|\alpha|} \, \mathrm{d}x\right)^{1/2}, & \forall\theta > 1. \end{cases}$$

Sia inoltre

$$\mathrm{C}(x\,, r) = \Omega \cap \Gamma(x\,, r),$$

essendo $\Gamma(x\,, r)$ la sfera di centro x e raggio r e poniamo

$$\Delta(x\,, \eta) = \mathrm{C}(x\,, k\eta\,|x|^\gamma).$$

In queste posizioni si intende che k ed η siano due numeri reali positivi, con k fissato ≥ 2 ed $\eta \leq \tilde{\eta}_\varepsilon$, essendo $\tilde{\eta}_\varepsilon$ dipendente da $\varepsilon\,, k$ e dai moduli di continuità degli $a_{\alpha\beta}$ con $|\alpha| = |\beta| = m$, con modalità per le quali rimandiamo a [2].

Indicheremo con $\mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ lo spazio delle u le cui derivate fino all'ordine s siano di quadrato integrabile su ogni compatto contenuto in $\overline{\Omega}$, e indicheremo con $\mathrm{H}^{s,2\nu}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ lo spazio delle $u \in \mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, per cui qualunque sia il compatto $\mathrm{D} \subset \overline{\Omega}$ si ha

$$\sup_{\substack{x_0 \in \mathrm{D} \\ 0<\rho<+\infty}} \rho^{-\nu}\left(\sum_{|\alpha|=s} \int_{\mathrm{D}\cap\Gamma(x_0,\rho)} (\mathrm{D}^\alpha u)^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2} < +\infty.$$

Ci proponiamo di studiare il problema di Dirichlet in Ω consistente nel ricercare una funzione u che soddisfi le equazioni:

$$\begin{cases} \mathrm{B}[\varphi\,, u] = \mathrm{F}[\varphi\,, f]\,, & \forall\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega) \\ \dfrac{\mathrm{d}^i u}{\mathrm{d}n^i} = \psi_i\,, \quad \text{su } \partial\Omega\,, & 0 \leq i \leq m - 1\,, \end{cases} \tag{1.7}$$

e una condizione all'infinito che sarà in seguito precisata; con n si è indicata la normale esterna a Ω.

2. TEOREMA DI ESISTENZA

In questo numero ci proponiamo di migliorare il Teorema di esistenza per il problema di Dirichlet in Ω stabilito nel n. 2 di [3].

Posto per $k \leq m$ e ξ reale

$$U^{(k)}(\theta, \xi, \Omega) = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega (D^\alpha u)^2 \, |x|^{2\theta(k-m)+2\theta\xi} \, dx \right)^{1/2}$$

$$U^{(0)}(\theta, 0, \Omega) = U^{(0)}(\theta, \Omega) \quad , \quad U^{(m)}(\Omega) = U^{(m)}(0, 0, \Omega),$$

si ha per un risultato di M. Troisi (2) (vedi il Lemma 1.4 di [7]):

$$(2.1) \quad U^{(k)}(\theta, \xi, \Omega) \leq K_1 \{ (U^{(m)}(\theta, \xi, \Omega))^{k/m} (U^{(0)}(\theta, \xi, \Omega))^{1-(k/m)} + U^{(0)}(\theta, \xi, \Omega) \} \leq$$
$$\leq K_2 \{ U^{(m)}(\theta, \xi, \Omega) + U^{(0)}(\theta, \xi, \Omega) \}, \qquad \theta \leq 1$$

$$(2.2) \quad U^{(k)}(1, m(1-\theta), \Omega) \leq K \{ U^{(m)}(1, m(1-\theta), \Omega) + U^{(0)}(\theta, \Omega) \}, \qquad \theta > 1.$$

Nel seguito porremo anche

$$\mathfrak{U}^{(m)}(\theta, \Omega) = U^{(m)}(\Omega) + U^{(0)}(\theta, \Omega).$$

Sussiste il Teorema:

TEOREMA 2.1. *Supposto Ω di classe $A^{(2m+p+1)}$ e che, oltre alle ipotesi del n. 1, gli $a_{\alpha\beta}$ verifichino la $(1.3)_p$ e $(1.3)_p^*$ con $p \geq \frac{n}{2}$, se gli f_α verificano la (1.6), la forma B, la (1.4) ed ε_0 è un numero positivo abbastanza piccolo, esiste una soluzione del problema di Dirichlet in Ω, nella classe delle funzioni $u \in H^{m,2\nu}_{loc}(\overline{\Omega})$ con $\nu = \mu + \frac{n}{2} - 1$, tali che*

$$(2.3) \qquad D^\alpha u = O(|x|^{m\theta - \gamma(|\alpha| + n/2)}), \qquad |\alpha| \leq m-1$$

$$(2.4) \qquad U_{m-1,\mu}(\Delta(x, \eta_\varepsilon)) = O(|x|^{m\theta - \gamma(m-1+\mu+n/2)}), \qquad \forall \varepsilon < \varepsilon_0$$

$$(2.5) \qquad \mathfrak{U}^{(m)}(\theta, \Omega) = O(H(f, \Omega) + \Phi_0 + \Phi_{m-1,\mu}).$$

Cominciamo con lo studiare il caso $\theta \leq 1$ e osserviamo che, in tal caso, l'esistenza di una soluzione soddisfacente la (2.3) e la (2.4) è già stata dimo-

(2) Con i simboli adottati da M. Troisi, il Lemma 1.4 viene applicato assumendo $\alpha = 0$ e $\rho(x) = h|x|^\theta$ nel caso $\theta \leq 1$, mentre nel caso $\theta > 1$ si assume $\alpha = m(1-\theta)$ e $\rho(x) = h|x|$, con $h \leq h_0$ ove h_0 è un fissato numero dipendente da Ω e θ.

strata in [3]. Al fine di stabilire che tale u verifica anche la (2.5) ricordiamo che, per dimostrare l'esistenza di una u verificante il problema e soddisfacente (2.3) e (2.4), viene innanzitutto costruita una funzione χ avente il supporto in un intorno di $\partial\Omega$, soddisfacente le condizioni al contorno e verificante le limitazioni:

$$D^\alpha \chi = O(\Phi_0 + \Phi_{m-1}), \qquad |\alpha| \leq m-1 \tag{2.6}$$

$$D^\alpha \chi = O((\Phi_0 + \Phi_{m-1,\mu})\, d^{\mu-1}(x)), \qquad |\alpha| = m \tag{2.7}$$

con $d(x) = \text{dist.}(x, \partial\Omega)$.

Per la costruzione della χ soddisfacente alle limitazioni indicate per $|\alpha| \leq m-1$, si veda A. Canfora [1]; la limitazione di $D^\alpha \chi$ con $|\alpha| = m$, è stata stabilita da C. Miranda [4], nel caso $n = 2$, con un procedimento che è però valido anche nel caso di n qualunque.

La u è allora ottenuta come limite di una successione $\{u_n + \chi\}$ uniformemente convergente sui compatti contenuti in $\overline{\Omega}$, insieme alle successioni $\{D^\alpha u_n + D^\alpha \chi\}$, $|\alpha| \leq m-1$, mentre per $|\alpha| = m$, $\{D^\alpha u_n + D^\alpha \chi\}$ converge debolmente, su ogni compatto contenuto in $\overline{\Omega}$, a $D^\alpha u$.

Le u_n sono di classe $H_0^m(\Omega_n) \cap H_{\text{loc}}^{m,2\nu}(\overline{\Omega})$ e ognuna di esse soddisfa l'equazione:

$$B[\varphi, u_n] = F[\varphi, f] - B[\varphi, \chi], \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_n).$$

L'esistenza di tali u_n è assicurata dai risultati (3) di C. Miranda [4].

Dimostriamo ora la (2.5). Poiché $u_n \in H_0^m(\Omega_n)$ si ha:

$$B[u_n, u_n] = F[u_n, f] - B[u_n, \chi],$$

e di qui valendosi della (1.4) si trae

$$(\mathfrak{A}_n^{(m)}(\theta, \Omega))^2 \leq K_1 \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |f_\alpha|\, |D^\alpha u_n|\, dx + K_2(\Phi_0 + \Phi_{m-1,\mu})\, \mathfrak{A}_n^{(m)}(\theta, \Omega);$$

da cui, valendosi della (2.1), si ricava facilmente:

$$\mathfrak{A}_n^{(m)}(\theta, \Omega) \leq K(H(f, \Omega) + \Phi_0 + \Phi_{m-1,\mu}).$$

Da qui l'asserto poiché K non dipende da n.

Il caso $\theta > 1$ non è stato esplicitamente considerato in [3]; si può però osservare che, nella dimostrazione del Teorema di esistenza prima richiamato, l'ipotesi $\theta \leq 1$ interviene unicamente per potere utilizzare la (2.1). Il ragionamento svolto conserva però la sua validità anche per $\theta > 1$ facendo subentrare la (2.2) al posto della (2.1).

(3) Si veda in proposito il n. 2 di [3].

3. TEOREMA DI UNICITÀ

In questo numero dimostreremo il seguente Teorema:

TEOREMA 3.1. *Sotto le ipotesi del Teorema 2.1, nella classe delle funzioni* $u \in H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, *soluzioni delle* (1.7), *soddisfacenti la condizione*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Omega_{2R}-\Omega_R} u^2 |x|^{-2\rho'} dx = 0, \tag{3.1}$$

con $2\rho' = \min\{2m, 2m\gamma + \gamma\eta^*\}$, *vale la maggiorazione* (2.5).

Introduciamo la funzione $\zeta^*(t)$ di classe $C_0^\infty([0, +\infty[)$

$$\zeta^*(t) \begin{cases} = 1 & 0 \le t \le 1 \\ = 0 & 2 \le t \end{cases}$$

e poniamo con $\rho < R$

$$\zeta(x) = \zeta^*\left(\frac{R - 2\rho + |x|}{R-\rho}\right).$$

È evidente che tale $\zeta(x)$ soddisfa le condizioni

$$\zeta(x) \begin{cases} = 1 & |x| \le \rho \\ = 0 & |x| \ge R. \end{cases} \tag{3.2}$$

Consideriamo ora un numero $\tilde{R} > R_0$ e supponiamo

$$\tilde{R} \le \rho < R \le 2\tilde{R}.$$

Si ha allora

$$D^k \zeta = O\left(\frac{1}{(R-\rho)^{|k|}}\right). \tag{3.3}$$

Supponendo in un primo momento che la u abbia i dati di Dirichlet nulli su $\partial\Omega$, si ha

$$B[u\zeta, u\zeta] = B[u\zeta^2, u] + O(\xi)$$

con

$$\xi = \sum \int_{\Omega_R - \Omega_\rho} |a_{\alpha\beta}|\,|D^{\alpha'} u|\,|D^{\beta'} u|\,|D^\sigma \zeta|\,|D^\tau \zeta|\, dx$$

ove la sommatoria è estesa a tutti gli $\alpha, \beta, \sigma, \tau, \alpha', \beta'$ tali che $0 \le |\alpha| + |\beta| \le 2m$, $|\alpha'| + |\sigma| = |\alpha|$, $|\beta'| + |\tau| = |\beta|$, $|\alpha'| + |\beta'| < |\alpha| + |\beta|$.

Poniamo ancora $\xi = \xi' + \xi''$ ove ξ' e ξ'' sono due sommatorie analoghe a quella che definisce ξ ma estesa, la prima agli α e β per i quali $|\alpha| = |\beta| = m$, la seconda agli α e β per cui $|\alpha| + |\beta| < 2m$. Si ha allora, tenendo presente la (3.2), la (3.3) e la (2.1):

$$(3.4) \qquad \xi' \leq K \sum \int_{\Omega_R - \Omega_\rho} |D^{\alpha'} u| \, |D^{\beta'} u| \, \frac{R^{|\sigma|}}{(R-\rho)^{|\sigma|}} \, \frac{R^{|\tau|}}{(R-\rho)^{|\tau|}} \, |x|^{|\alpha'|-m} \, |x|^{|\beta'|-m} \, dx \leq$$

$$\leq K \left(\frac{R}{R-\rho}\right)^{2m} \{[U^{(m)}(\Omega_R - \Omega_\rho)]^{\frac{2m-1}{2m}} [U^{(0)}(1, \Omega_R - \Omega_\rho)]^{1/m} + [U^{(0)}(1, \Omega_R - \Omega_\rho)]^2\}.$$

Analogamente valendosi anche della (1.2):

$$(3.5) \qquad \xi'' \leq K \left(\frac{R}{R-\rho}\right)^{2m} \sum \int_{\Omega_R - \Omega_\rho} |x|^{\gamma(|\alpha'|-m) - \frac{\gamma\eta^*}{2}} |D^{\alpha'} u| \cdot | \, |x|^{\gamma(|\beta'|-m) - \frac{\gamma\eta^*}{2}} |D^{\beta'} u| \, dx \leq$$

$$\leq K \left(\frac{R}{R-\rho}\right)^{2m} \left\{ [U^{(m)}(\Omega_R - \Omega_\rho)]^{\frac{2m-1}{2m}} \left[U^{(0)}\left(\gamma, -\frac{\eta^*}{2}, \Omega_R - \Omega_\rho\right)\right]^{1/m} + \right.$$

$$\left. + \left[U^{(0)}\left(\gamma, -\frac{\eta^*}{2}, \Omega_R - \Omega_\rho\right)\right]^2 \right\}.$$

Si ha poi utilizzando la (1.4):

$$(-1)^m c_2 \, B[u\zeta, u\zeta] \geq \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega_R} (D^\alpha (u\zeta))^2 \, dx + \int_{\Omega_R} u^2 \zeta^2 |x|^{-2m\theta} \, dx,$$

da cui tenendo ancora conto delle (3.2), (3.3) e (2.1):

$$(3.6) \qquad (-1)^m c_2 \, B[u\zeta, u\zeta] \geq U^{(m)}(\theta, \Omega_\rho) -$$

$$- K \left(\frac{R}{R-\rho}\right)^{2m} \{[U^{(m)}(\Omega_R - \Omega_\rho)]^{\frac{2m-1}{2m}} [U^{(0)}(1, \Omega_R - \Omega_\rho)]^{1/m} + [U^{(0)}(1, \Omega_R - \Omega_\rho)]^2\}.$$

Ed ancora utilizzando la (2.1) se $\theta \leq 1$ e la (2.2) se $\theta > 1$:

$$(3.7) \qquad (-1)^m B[u\zeta^2, u] \leq K \left(\frac{R}{R-\rho}\right)^m \mathcal{U}^{(m)}(\theta, \Omega_R) \, H(f, \Omega_R).$$

Facciamo ora la seguente posizione:

$$w(\tau) = (\mathcal{U}^{(m)}(\theta, \Omega_\tau))^2$$

$$\psi(\tau) = [H(f, \Omega_\tau)]^2 + [U^{(0)}(1, \Omega_\tau - \Omega_{\tilde{R}})]^2 + \left[U^{(0)}\left(\gamma, -\frac{\eta^*}{2}, \Omega_\tau - \Omega_{\tilde{R}}\right)\right]^2;$$

si ha dunque, tenendo presente (3,4), (3.5), (3.6), (3.7):

$$(3.8) \qquad w(\rho)(R-\rho)^{2m} \leq K_1 R^{2m} \psi(R) + K_2 [\psi(R)]^{\frac{1}{2m}} [w(R)]^{\frac{2m-1}{2m}} R^{2m}.$$

In base ad un noto Lemma di crescenza (vedi C. Miranda [5]):

$$w(\rho)(2\tilde{R} - \rho)^{2m} \leq K_1 (2\tilde{R})^{2m} \psi(2\tilde{R}) + K_2 (2\tilde{R})^{2m} [\psi(2\tilde{R})]^{\frac{1}{2m}} [w(\rho)]^{\frac{2m-1}{2m}}.$$

Di conseguenza, ponendo $\rho = \tilde{R}$, si ottiene:

$$w(\tilde{R}) \leq K\psi(2\tilde{R}),$$

da cui facendo divergere $\tilde{R}$ si ottiene l'asserto.

Passando ora al caso in cui u ha i dati di Dirichlet non nulli su $\partial\Omega$, si può osservare che, costruita una funzione χ, a supporto compatto in $\overline{\Omega}$, e con i dati di Dirichlet su $\partial\Omega$ eguali a quelli di u (vedi C. Miranda [4]) la quale verifichi le limitazioni (2.6) e (2.7), posto $u_1 = u - \chi$, tale u_1 ha i dati di Dirichlet nulli su $\partial\Omega$ e verifica l'equazione:

$$B[\varphi, u_1] = F[\varphi, f] - B[\varphi, \chi].$$

Tenendo conto delle (2.6) e (2.7), e valendosi del risultato stabilito nel caso precedente, si ottiene facilmente la (2.5), prima per la u_1 e poi per la u.

Nella dimostrazione del Teorema 3.1 è contenuta la dimostrazione del seguente Lemma:

LEMMA 3.1. *Nelle ipotesi del Teorema 3.1, nella classe delle* $u \in H^m_{loc}(\overline{\Omega})$ *soluzioni delle* (1.7) *in* Ω, *verificanti la condizione*

$$\sup_R \int_{\Omega_{2R}-\Omega_R} u^2 |x|^{-2\rho'} dx \leq T^2, \tag{3.9}$$

con $2\rho' = \min\{2m, 2m\gamma + \gamma\eta^*\}$, *si ha*:

$$\mathfrak{A}^{(m)}(\theta, \Omega) = O(H(f, \Omega) + \Phi_0 + \Phi_{m-1,\mu} + T). \tag{3.10}$$

Si ha poi il Teorema:

TEOREMA 3.2. *Nelle ipotesi del Teorema 2.1, se* $\theta \leq 1$ *e* $2m\theta \leq 2m\gamma + \gamma\eta^*$, *si ha esistenza ed unicità per il problema* (1.7), *nella classe delle* $u \in H^m_{loc}(\overline{\Omega})$, *verificanti la* (3.9). *La soluzione è di classe* $H^{m,2\nu}_{loc}(\overline{\Omega})$ *con* $\nu = \mu + \frac{n}{2} - 1$.

Infatti per la soluzione di cui al Teorema 2.1, la (3.9) è conseguenza della (2.5), mentre l'unicità discende dal Teorema 3.1 e dal Lemma 3.1 perché ogni soluzione verificante la (3.9) verifica la (3.1) in conseguenza della (3.10).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. CANFORA, *Teorema del massimo modulo e Teorema di esistenza per il problema di Dirichlet relativo ai sistemi fortemente ellittici*, « Ricerche di Matematica », *15*, 246–294 (1966).

[2] S. MATARASSO, *Sul problema esterno di Dirichlet per le equazioni ellittiche di ordine superiore in due variabili*, « Ricerche di Matematica », *20*, 66–89 (1971).

[3] S. MATARASSO, *Sul problema esterno di Dirichlet per le equazioni ellittiche di ordine superiore in n variabili*, « Ricerche di Matematica », *21* (1972) (in corso di stampa).

[4] C. MIRANDA, *Teorema del massimo modulo e Teorema di esistenza ed unicità per il problema di Dirichlet relativo alle equazioni ellittiche in due variabili*, « Annali di Matematica pura ed applicata », (IV) *46*, 265–312 (1958).

[5] C. MIRANDA, *Teoremi di unicità in domini non limitati e Teoremi di Liouville per le soluzioni dei problemi al contorno relativi alle equazioni ellittiche*, « Annali di Matematica pura ed applicata », (IV) *59*, 189–212 (1962).

[6] C. MIRANDA, *Partial differential equations of elliptic type*, « Ergebnisse der Mathematik », Springer Verlag (1970).

[7] M. TROISI, *Problemi ellittici con dati singolari*, « Annali di Matematica pura ed applicata », (IV) *83*, 363–408 (1969).