Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Enrico Bompiani

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.2, p. 150–155.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_2_150_0>

Geometria. — *Sul carattere proiettivo del rapporto plurisezionale.* Nota (*) del Socio ENRICO BOMPIANI.

SUMMARY. — Several constructions of a cross-ratio equivalent to the plurisectional ratio (studied by Mobius, Poncelet and Longo) of a closed polygon with a point on each side in any projective space.

1. PREMESSA

A. F. Mobius (1790–1868) ha considerato nell'ordinario spazio tridimensionale P_3 la figura di un poligono chiuso di vertici A_α, con $\alpha = 0, 1, \cdots, m-1$ su ciascun lato (retta) del quale sia fissato un punto M_α (*poligono chiuso puntato, p.c.p.*) e per esso il prodotto dei rapporti semplici $\Pi(A_\alpha A_{\alpha+1} M_\alpha)$ che ha chiamato *rapporto plurisezionale*, che d'ora innanzi diremo per brevità *plurirapporto* $\Pi(A_\alpha A_{\alpha+1} M_\alpha)$ ove per $\alpha = m-1$ bisogna porre $A_m \equiv A_0$.

Questo plurirapporto appare quindi dalla definizione un ente di carattere affine.

Il carattere proiettivo di questa espressione è stato rilevato da molto tempo [1]: non credo tuttavia sia noto il Teorema che chiude il n. 2 e che ne mette immediatamente in evidenza il carattere proiettivo e di più offre la possibilità di assegnare un birapporto che è uguale al prodotto di quei rapporti semplici.

J. Y. Poncelet (1788–1867) ha poi dimostrato che se si proiettano i punti A_α e M_α (in P_3) da un qualsiasi punto $S\ (\neq A_\alpha)$ e si sostituiscono ad essi punti A'_α, M'_α presi arbitrariamente purché non in S sulle rette SA_α, SM_α in modo che costituiscano un nuovo poligono chiuso puntato il plurirapporto relativo a questo è uguale a quello relativo al poligono primitivo.

C. Longo (1912–1971) ha ripreso l'argomento [2] dimostrando che il Teorema di Poncelet vale in uno spazio di dimensione n qualsiasi P_n e quando si proietti il p.c.p. da un $P_h \subset P_n$ $(h \leq n-2)$ e si spostino i punti A_α, M_α negli spazi P_{h+1} che li congiungono a P_h in modo da costituire un nuovo p.c.p. (i cui punti $A'_\alpha, A'_{\alpha+1}, M'_\alpha$ siano allineati).

Questa larga estensione data dal Longo al Teorema di Poncelet fornisce per altra via la prova che quel plurirapporto equivale ad un birapporto (che si riduce ad una ripetuta applicazione del Teorema di Menelao).

(*) Presentata nella seduta del 12 febbraio 1972.

(1) Il prodotto $\Pi(A_\alpha A_{\alpha-1} M_\alpha)$ è una *espressione metrico-proiettiva*. Si veda in proposito: F. SEVERI, *Complementi di geometria proiettiva*. (N. Zanichelli, Bologna 1906), § 5, o anche: G. CASTELNUOVO, *Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva*. (Soc. Editrice Dante Alighieri, 1905), Cap. I, nn. 35–37.

(2) C. LONGO, *Su alcune proprietà del rapporto plurisezionale*, « Rend. di Matem. e delle sue applicazioni », s. V, *3*, 90–97 (1942). In questo lavoro, come nei trattati citati, ci si riferisce a nozioni metriche (angoli, proiezioni ortogonali) del tutto estranee alla trattazione che segue.

2. CARATTERE PROIETTIVO DEL PLURIRAPPORTO

Cominciamo dal provare un teorema che mette in evidenza il carattere proiettivo del plurirapporto.

Si consideri uno spazio proiettivo P_n ed in esso due punti distinti A_α, $A_{\alpha+1}$ che in un riferimento proiettivo abbiano coordinate omogenee $\overset{i}{x}_\alpha$ e rispettivamente $\overset{i}{x}_{\alpha+1}$.

Un punto della loro congiungente, che indicherò con M_α ha coordinate del tipo

$$\overset{i}{\xi}_\alpha = \overset{i}{x}_\alpha + \mu_\alpha \overset{i}{x}_{\alpha+1}$$

caratterizzate dal valore di μ_α. Per un altro punto N_α della stessa retta prenderemo le coordinate

$$\overset{i}{\eta}_\alpha = \overset{i}{x}_\alpha + \nu_\alpha \overset{i}{x}_{\alpha+1}.$$

Se N_α è l'intersezione della retta $A_\alpha A_{\alpha+1}$, con l'iperpiano

$$a_i x^i = 0$$

non contenente né A_α né $A_{\alpha+1}$ dev'essere

$$\nu_\alpha = -a_i \overset{i}{x}_\alpha / a_i \overset{i}{x}_{\alpha+1}.$$

Si ha il valore del birapporto

$$(A_\alpha A_{\alpha+1} M_\alpha N_\alpha) = (0, \infty, \mu_\alpha, \nu_\alpha) = -\frac{a_i \overset{i}{x}_{\alpha+1}}{a_i \overset{i}{x}_\alpha} \mu_\alpha.$$

Si dia allora un poligono chiuso puntato di vertici A_α con $\alpha = 0, \cdots, m-1$ (per $\alpha = m-1$ il vertice successivo ad A_α è A_0) con i punti M_α, poligono che potrà indicarsi con $\mathcal{P}_{A_0 \cdots A_{m-1}}^{M_0 \cdots M_{m-1}}$ e si seghino i suoi lati con un iperpiano qualsiasi nei punti $N_\alpha \neq A_\alpha$.

Il prodotto dei birapporti

$$\Pi (A_\alpha A_{\alpha+1} M_\alpha N_\alpha) = (-1)^m \Pi \mu_\alpha$$

ha sempre lo stesso valore qualunque sia l'iperpiano secante.

In particolare se uno di questi iperpiani si assume come iperpiano improprio (facendo di P_n uno spazio affine) quel prodotto ha il valore del plurirapporto di $\mathcal{P}_{A_0 \cdots A_{m-1}}^{M_0 \cdots M_{n-1}}$.

Concludendo:

Il plurirapporto di un poligono chiuso puntato (p.c.p.) *ha carattere proiettivo ed è il prodotto dei birapporti dei tre punti dati* $A_\alpha A_{\alpha+1} M_\alpha$ *su ciascun lato e dell'intersezione* N_α *di questo con un iperpiano scelto ad arbitrio* (*non contenente alcun vertice*).

3. Riduzione di un plurirapporto ad un birapporto nel caso di un $(n+1)$–gono in P_n

Il caso più semplice da considerare è quello in cui i vertici del poligono siano $n+1$ ed individuino lo spazio ambiente P_n. Indichiamo i vertici consecutivi con $A_0, A_1, \cdots, A_n$ e i punti assegnati sui lati con $M_0, M_1, \cdots, M_n$.

Per passare dai rapporti semplici $(A_\alpha A_{\alpha+1} M_\alpha)$ del plurirapporto ai birapporti tagliamo il poligono con l'iperpiano P_{n-1} dei punti $M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}$ e sia N_n la sua intersezione col lato $A_n A_0$.

I primi n dei rapporti semplici il cui prodotto dà il valore del plurirapporto valgono 1 (perché $N_\alpha \equiv M_\alpha$ per $\alpha = 0, \cdots, n-1$).

Quindi il valore del plurirapporto è quello del birapporto

$$(A_n A_0 M_n N_n) .$$

Enunciamo esplicitamente il Teorema:

Dato un $(n+1)$-gono puntato in P_n il valore del suo plurirapporto è quello del birapporto formato da due vertici consecutivi, dal punto assegnato sulla loro retta e dal punto ove questa è segata dal P_{n-1} dei punti assegnati sui rimanenti lati.

In particolare se il plurirapporto vale 1 i punti M_α appartengono ad uno stesso P_{n-1} (3); se vale -1 il punto N_n su un lato è il coniugato armonico di M_n rispetto ai vertici A_n, A_0 che definiscono il lato (mentre sugli altri lati i punti M_α ed N_α coincidono).

4. Riduzione ad un birapporto del plurirapporto nel caso più generale

Esaminiamo il caso di un m–gono di P_n con $m = n+p$ e $p \leq n$.

Dividiamo i vertici nei due gruppi

$$A_0, A_1, \cdots, A_n \qquad \text{e} \qquad A_n, A_{n+1}, \cdots, A_{n+p-1}, A_0$$

con i punti M_α $(\alpha = 0, \cdots, n+p-1)$ sui lati dello m–gono.

Consideriamo la retta $A_0 A_n$: essa è tagliata dall'iperpiano P_{n-1} di di $M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}$ in un punto S.

Per quanto s'è visto nel caso precedente il plurirapporto

$$(A_0 A_1 M_0)(A_1 A_2 M_1) \cdots (A_{n-1} A_n M_{n-1})(A_n A_0 S) = 1$$

quindi

$$(A_0 A_1 M_0)(A_1 A_2 M_1) \cdots (A_{n-1} A_n M_{n-1}) = (A_0 A_n S) .$$

(3) Per $n = 2$ questo è il Teorema di Menelao.

Passiamo ora ai lati rimanenti con i vertici $A_n, A_{n+1}, \cdots, A_{n+p-1}, A_0$ con i punti $M_n, \cdots, M_{n+p-1}$: i vertici appartengono ad un P_p e i relativi punti M_α ad un P_{p-1} che taglia la retta $A_0 A_n$ in un punto T. Ne segue che

$$(A_n A_{n+1} M_n) \cdots (A_{n+p-1} A_0 M_{n+p-1}) (A_0 A_n T) = 1$$

cioè

$$(A_n A_{n+1} M_n) \cdots (A_{n+p-1} A_0 M_{n+p-1}) = \frac{1}{(A_0 A_n T)} .$$

Segue allora, moltiplicando le due relazioni ottenute contenenti S e T che

$$(A_0 A_1 M_0) \cdots (A_{n-1} A_n M_{n-1}) (A_n A_{n+1} M_n) \cdots (A_{n+p-1} A_0 M_{n+p-1}) =$$
$$= \frac{(A_0 A_n S)}{(A_0 A_n T)} = (A_0 A_n ST) .$$

Enunciamo esplicitamente il risultato:

Dato un m–gono puntato in P_0 *con* $m = n + p$ $(p < n)$, *si considerino due vertici* A_0, A_n *estremi da una parte di n lati consecutivi e d'altra parte dei rimanenti p lati. La retta* $A_0 A_n$ *è incontrata dal* P_{n-1} *dei punti* M_α *appartenenti ai primi n lati e dal* P_{p-1} *dei punti* M_α *appartenenti ai p lati residui in due punti il cui birapporto con* A_0 *e* A_n *dà il valore del plurirapprto del poligono puntato dato.*

Conseguenze analoghe a quelle trovate per $p = 1$ si hanno quando il plurirapporto è $= \pm 1$ $(T \equiv S$ ovvero T coniugato armonico di S rispetto ad $A_0, A_n)$.

Passiamo ora al caso del tutto generale in cui $m = kn + p$ con k intero positivo e $1 \leq p \leq n$.

Dividiamo i vertici nei seguenti gruppi:

$$\overset{1^o}{A_0 \cdots A_n} \;,\; \overset{2^o}{A_n \cdots A_{2n}} \;,\; \overset{k^o}{A_{(k-1)n} \cdots A_{kn}} \;,\; \overset{(k+1)^o}{A_{kn+1} \cdots A_{kn+p-1} A_0} .$$

Risulta da quanto precede (cioè sempre dal Teorema del n. 2) che al prodotto dei rapporti semplici sui lati puntati (con $M_0, \cdots, M_{n-1}$) del 1^o gruppo si può sostituire il rapporto semplice $(A_0 A_n S_1)$ ove S_1 è il punto d'intersezione della retta $A_0 A_n$ con il P_{n-1} di $M_0, \cdots, M_{n-1}$.

Analogamente per il 2^o gruppo al prodotto dei rapporti semplici sui suoi lati puntati si può sostituire un solo rapporto semplice $(A_n A_{2n} S_2)$ ove S_2 è l'intersezione della retta $A_n A_{2n}$ con il P_{n-1} dei punti M_α appartenenti ai lati del secondo gruppo. Così seguitando per ciascuno dei gruppi indicati si sostituisce al plurirapporto relativo al poligono chiuso puntato dato il prodotto di soli $k+1$ rapporti semplici

$$(A_0 A_n S_1) (A_n A_{2n} S_2) \cdots (A_{(k-1)n} A_{kn} S_k) (A_{kn} A_0 S_{k+1})$$

relativi ad un nuovo poligono chiuso puntato con $k + 1$ vertici.

Se occorre, cioè se $k > n$, si ripete il processo di riduzione passando ad un altro p.c.p. Sicché la riduzione al calcolo di un solo birapporto per avere il plurirapporto del poligono dato vale in ogni caso.

5. Teorema di Poncelet–Longo

Diamo ora una dimostrazione analitica della larga generalizzazione che il Longo ha dato di un Teorema di Poncelet su trasformazioni di un poligono chiuso puntato che non alterino il plurirapporto.

Sia P_n lo spazio del p.c.p. $\mathcal{S}_{A_0 \cdots A_{m-1}}^{M_0 \cdots M_{m-1}}$ e in P_n si prenda un sottospazio P_h, $h \geq 0$, non passante per vertici del p.c.p. Scegliamo il riferimento in P_n in modo che il P_h sia individuato dall'annullarsi di $n-h$ coordinate cosicché un punto B di P_h abbia coordinate $(y^p, y^\mu = 0)$ con $p = 0, 1, \cdots, h$ e $\mu = h+1, \cdots, n$. Distinguiamo anche le coordinate di un punto A di P_n in due gruppi (x^p, x^μ).

Associamo arbitrariamente ad un punto $A_\alpha(x_\alpha^p, x_\alpha^\mu)$ un punto $B_\alpha(y_\alpha^p, y_\alpha^\mu = 0)$ di P_h e sulla congiungente $A_\alpha B_\alpha$ prendiamo pure ad arbitrio un punto $A'_\alpha(x_\alpha^p + \sigma_\alpha y_\alpha^p, x_\alpha^\mu) \neq B_\alpha$.

Ad un punto $M_\alpha(x_\alpha^p + \mu_\alpha x_{\alpha+1}^p, x_\alpha^\mu + \mu_\alpha x_{\alpha+1}^\mu)$ della retta $A_\alpha A_{\alpha+1}$, caratterizzato da μ_α facciamo corrispondere sulla retta $A'_\alpha A'_{\alpha+1}$ il punto M'_α di coordinate

$$x_\alpha^p + \sigma_\alpha y_\alpha^p + \mu_\alpha (x_{\alpha+1}^p + \sigma_{\alpha+1} y_{\alpha+1}^p), \; x_\alpha^\mu + \mu_\alpha x_{\alpha+1}^\mu .$$

Ovviamente la retta $M_\alpha M'_\alpha$ incontra il P_h (per vederlo basta sottrarre dalle coordinate di M'_α quelle di M_α).

Vogliamo provare che il p.c.p. $\mathcal{S}_{A'_0 \cdots A'_{m-1}}^{M'_0 \cdots M'_{m-1}}$ così costruito ha lo stesso plurirapporto del p.c.p. dato $\mathcal{S}_{A_0 \cdots A_{m-1}}^{M_0 \cdots M_{m-1}}$.

Allo scopo, secondo il criterio usato nel n. 2 per passare da rapporti semplici a birapporti, seghiamo i lati corrispondenti $A_\alpha A_{\alpha+1}$ e $A'_\alpha A'_{\alpha+1}$ con lo stesso iperpiano

$$a_p x^p + a_\mu x^\mu = 0 .$$

I punti d'intersezione con i due lati detti siano N_α e N'_α di coordinate rispettivamente

$$(x_\alpha^p + \nu_\alpha x_{\alpha+1}^p, x_\alpha^\mu + \nu_\alpha x_{\alpha+1}^\mu) \quad \text{e} \quad (x'^p_\alpha + \nu'_\alpha x'^p_{\alpha+1}, x'^\mu_\alpha + \nu'_\alpha x'^\mu_{\alpha+1}) .$$

Si è già trovato (n. 2) che $\nu_\alpha = - a_i x^i / a_{i+1} x^{i+1}$; se si calcola ν'_α si trova

$$\nu'_\alpha = - \frac{a_p (x_\alpha^p + \sigma_\alpha y_\alpha^p) + a_\mu x_\alpha^\mu}{a_p (x_{\alpha+1}^p + \sigma_{\alpha+1} y_{\alpha+1}^p) + a_\mu x_{\alpha+1}^\mu} .$$

Si è già visto che $(A_\alpha A_{\alpha+1} M_\alpha N_\alpha) = \mu_\alpha / \nu_\alpha$; analogamente $(A'_\alpha A'_{\alpha+1} M'_\alpha N'_\alpha) = \mu_\alpha / \nu'_\alpha$.

Ma siccome $\Pi \nu_\alpha = \Pi \nu'_\alpha = (-1)^m$ si ha pure

$$\Pi (A_\alpha A_{\alpha+1} M_\alpha N_\alpha) = \Pi (A'_\alpha A'_{\alpha+1} M'_\alpha N'_\alpha) = (-1)^m \Pi \mu_\alpha$$

cioè i plurirapporti relativi ai due poligoni sono uguali (quali si siano le σ_α e l'iperpiano secante).

Il Teorema di Poncelet vale per $n = 3$, $h = 0$; quello di Longo per valori qualsiansi di n ed h (e, s'intende, di m).

Vogliamo ora profittare dell'ultimo Teorema per dare una nuova costruzione del birapporto al plurirapporto di un qualsiasi m–gono in P_n.

Prendiamo $h = n - 3$; quindi gli spazi proiettanti i punti del poligono $\mathcal{S}^{M_0 \cdots M_{m-1}}_{A_0 \cdots A_{m-1}}$ sono sottospazi P_{n-2} di P_n. Segando con un piano la configurazione ottenuta proiettando il p.c.p. da P_{n-3} si ha un poligono chiuso puntato piano $\mathcal{S}^{M'_0 \cdots M'_{m-1}}_{A'_0 \cdots A'_{m-1}}$.

Consideriamo il triangolo $A'_0 A'_1 A'_2$ di cui il lato $A'_0 A'_2$ *non* appartiene al nuovo poligono.

La retta $M'_0 M'_1$ incontra la $A'_0 A'_2$ in un punto M'_{02} ed esso è tale (n. 2, Teorema di Menelao) che

$$(A'_0 A'_1 M'_0)(A'_1 A'_2 M'_1) = (A'_0 A'_2 M'_{02}).$$

Passiamo al triangolo $A'_0 A'_2 A'_3$: la retta $A'_0 A'_3$ è tagliata dalla retta $M'_{02} M'_2$ in un punto M'_{03} tale che

$$(A'_0 A'_2 M'_{02})(A'_2 A'_3 M'_2) = (A'_0 A'_2 M'_{03})$$

quindi

$$(A'_0 A'_1 M'_0)(A'_1 A'_2 M'_1)(A'_2 A'_3 M'_2) = (A'_0 A'_3 M'_{03})$$

e perciò nel calcolo del plurirapporto si può sostituire al prodotto dei primi tre rapporti semplici un solo rapporto semplice.

Così procedendo si riuscirà a sostituire al prodotto dei rapporti semplici relativi ai lati da $A'_0 A'_1$ fino ad A'_{m-2} un solo rapporto semplice $(A'_0 A'_{m-2} M'_{0\,m-2})$.

Finalmente la congiungente di $M'_{0\,m-2}$ con M'_{m-2} (sul lato $A'_{m-2} A'_{m-1}$) sega l'ultimo lato $A'_{m-1} A'_0$ del poligono in un punto $M'_{0\,m-1}$: il birapporto $(A'_0 A'_{m-1} M'_{0\,m-1} M'_{m-1})$ dà il valore del plurirapporto relativo a $\mathcal{S}^{M_0 \cdots M_{m-1}}_{A_0 \cdots A_{m-1}}$.