ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

NICOLA MELONE

Questioni di finitezza nelle categorie abeliane

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 52 (1972), n.3, p. 291–300.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_3_291_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Algebra. — *Questioni di finitezza nelle categorie abeliane* (*). Nota di NICOLA MELONE, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — The existence of abelian categories with a finite number of objects or with finite Homs is investigated. Thus a complete characterization of categories having a finite number of objects and morphisms, with products and a zero-object, is given. The non existence of abelian categories with a finite number of objects, non finite Hom and with endomorphisms satisfying the following condition is then proved: every endomorphism is a mono-epimorphism. An example of abelian category with a unique non zero-object and non finite Hom is finally obtained.

1. INTRODUZIONE

Il presente lavoro ha lo scopo di analizzare l'esistenza di categorie abeliane « piccole », e precisamente dotate o di un numero finito di oggetti, o con Hom finiti. Nel seguito ci riferiremo sempre alla definizione di categoria abeliana data da P. Freyd in [1], pag. 35.

Nei primi due capoversi del n. 2 daremo esempi di categorie finite sugli oggetti o con Hom finiti che verificano gli assiomi A_0 , A_2 , A_2^* , A_3 , A_3^* specificati in [1]. Il punto cruciale del problema posto è quindi l'esistenza di categorie dotate di prodotti e somme finiti (cioè soddisfacenti agli assiomi A_1 , A_1^* di [1]) e finite sugli oggetti o con Hom finiti. Nel seguito una categoria verificante gli assiomi A_1 , A_1^* sarà chiamata una (A_1, A_1^*) -categoria.

L'osservazione testè fatta fornisce indicazioni circa la risoluzione del problema posto e ci porta ad investigare l'esistenza di (A_1, A_1^*) -categorie dotate di un numero finito di oggetti o con Hom finiti.

A tal proposito denoteremo con $\mathfrak{A}_{0,n}$ la categoria costituita da $n + 1$ oggetti $A_0 = 0, A_1, A_2, \dots, A_n$ ed i cui Hom sono definiti ponendo:

$$\text{Hom}(A_i, A_j) = \{A_i \rightarrow 0 \rightarrow A_j\}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n.$$

Nel n. 2 dimostreremo che *ogni categoria abeliana finita sugli oggetti e sui morfismi* (dotata cioè di un numero finito di oggetti e di morfismi) è *necessariamente del tipo* $\mathfrak{A}_{0,n}$. La tecnica adoperata per conseguire questo risultato sfrutta sostanzialmente la sola ipotesi di esistenza di prodotti finiti e di un oggetto nullo; dunque la proposizione ha carattere più generale, nel senso che: *ogni categoria finita sugli oggetti e sui morfismi, dotata di un oggetto nullo e di prodotti finiti, è del tipo* $\mathfrak{A}_{0,n}$.

È appena il caso di osservare che vale altresì la proposizione duale della precedente.

(*) Lavoro eseguito quale borsista del C.N.R. nel gruppo G.N.S.A.G.A.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1972.

Il caso di (A_1, A_1^*) -categorie finite sugli oggetti e con Hom finiti è così completamente esaurito. Poiché esistono manifestamente categorie con infiniti oggetti e con Hom finiti, per completare la questione resta da esaminare il caso di (A_1, A_1^*) -categorie con un numero finito di oggetti e con Hom non finiti, del che ci occuperemo nei nn. 3, 4.

Il n. 3 sarà precisamente dedicato allo studio del comportamento di (A_1, A_1^*) -categorie finite sugli oggetti e con Hom infiniti. Proveremo, tra l'altro, che *non esiste nessuna categoria abeliana con n oggetti non nulli, con Hom infiniti ed in cui ogni endomorfismo è un mono-epimorfismo.*

Nel n. 4 daremo poi un esempio di categoria abeliana con un solo oggetto non nullo e con Hom infinito. Dimostreremo inoltre che *non esistono categorie abeliane con due oggetti non nulli e prive di idempotenti rispetto al prodotto tra oggetti.*

2. (A_1, A_1^*) -CATEGORIE FINITE SUGLI OGGETTI E SUI MORFISMI

Sia G un gruppo abeliano finito: denotiamo con $\mathcal{A}_G$ la categoria (piccola) che ha per oggetti i sottogruppi di G ed i quozienti fra questi in tutti i modi possibili e per morfismi gli omomorfismi gruppali. Si riconosce subito che $\mathcal{A}_G$ fornisce un esempio di categoria finita sugli oggetti e sui morfismi, che verifica tutti gli assiomi di categoria abeliana tranne quello concernente i prodotti e le somme finiti.

Se G è un gruppo abeliano infinito e semplice (cioè privo di sottogruppi propri), per ogni $f \in \text{Hom}(G, G)$ si ha:

$$(2.1) \quad \ker f = G \circ (0),$$

$$(2.2) \quad f = 0_G \text{ ovvero } f \text{ epimorfismo,}$$

$$(2.3) \quad \text{cok } f = G/f(G) = G \circ (0).$$

Denotata con $\mathcal{A}_G$ la categoria che ha per oggetti (0) , G e per morfismi gli omomorfismi gruppali, la (2.1) mostra che ogni morfismo ha nucleo, la (2.3) che ogni morfismo ha conucleo, la (2.2) che ogni monomorfismo, essendo un isomorfismo, è normale; inoltre, ogni epimorfismo è conormale in quanto conucleo del suo nucleo. Pertanto $\mathcal{A}_G$ fornisce un esempio di categoria con due oggetti e con Hom infinito, che verifica tutti gli assiomi di categoria abeliana tranne quello riguardante i prodotti e le somme finiti.

Passiamo ora ad occuparci della caratterizzazione completa delle categorie finite sugli oggetti e sui morfismi, dotate di prodotti finiti e di un oggetto nullo. Richiamiamo alcune definizioni e notazioni che utilizzeremo in seguito (cfr. [3], pag. 53).

Data una categoria $\mathcal{A}$, sia $\{A \xrightarrow{f_i} A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di morfismi di $\mathcal{A}$. Denotiamo con:

$$(2.4) \quad H_A : \mathcal{A} \longrightarrow \text{Ens},$$

il funtore morfismo controvariante che associa, ad ogni oggetto $X \in \mathcal{A}$, l'insieme $H_A(X) = \text{Hom}(X, A)$ e ad ogni morfismo $X \xrightarrow{x} Y$ di $\mathcal{A}$, l'applicazione

$$H_A(x) : \text{Hom}(Y, A) \longrightarrow \text{Hom}(X, A)$$

definita ponendo, per ogni $Y \xrightarrow{y} A \in \text{Hom}(Y, A)$:

$$(2.5) \quad H_A(x)(Y \xrightarrow{y} A) = X \xrightarrow{x} Y \xrightarrow{y} A.$$

Sia ancora

$$(2.6) \quad \bigotimes_{i \in I} H_{A_i} : \mathcal{A} \longrightarrow \text{Ens}$$

il funtore (controvariante) che fa corrispondere ad ogni X di $\mathcal{A}$ l'insieme $\prod_{i \in I} \text{Hom}(X, A_i)$ e ad ogni morfismo $X \xrightarrow{x} Y$ di $\mathcal{A}$ l'applicazione:

$$(2.7) \quad \bigotimes_{i \in I} H_{A_i}(x) : \prod_{i \in I} \text{Hom}(Y, A_i) \longrightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}(X, A_i)$$

definita ponendo, per ogni elemento $\{Y \xrightarrow{y_i} A_i\}_{i \in I}$ di $\prod_{i \in I} \text{Hom}(Y, A_i)$:

$$(2.8) \quad \bigotimes_{i \in I} H_{A_i}(x) (\{Y \xrightarrow{y_i} A_i\}_{i \in I}) = \{X \xrightarrow{x} Y \xrightarrow{y_i} A_i\}_{i \in I}.$$

Indichiamo con:

$$(2.9) \quad T_A : H_A \longrightarrow \bigotimes_{i \in I} H_{A_i}$$

la trasformazione naturale tra i funtori H_A e $\bigotimes_{i \in I} H_{A_i}$, cioè la legge di $\mathcal{A}$ in Ens che associa ad ogni oggetto X di $\mathcal{A}$ l'applicazione

$$(2.10) \quad T_A(X) : \text{Hom}(X, A) \longrightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}(X, A_i)$$

che fa corrispondere, ad ogni morfismo $X \longrightarrow A$, l'elemento

$$T_A(X)(X \longrightarrow A) = \{X \longrightarrow A \xrightarrow{y_i} A_i\}_{i \in I} \quad \text{di} \quad \prod_{i \in I} \text{Hom}(X, A_i).$$

In modo analogo, sostituendo ai funtori H_A e $\bigotimes_{i \in I} H_{A_i}$, i rispettivi funtori duali $H^A : \mathcal{A} \longrightarrow \text{Ens}$ (funtore morfismo covariante) e $\bigotimes_{i \in I} H^{A_i} : \mathcal{A} \longrightarrow \text{Ens}$ (definito analogamente al funtore (2.6)), ed alla famiglia $\{A \xrightarrow{y_i} A_i\}_{i \in I}$ la famiglia $\{A_i \xrightarrow{y_i} A\}_{i \in I}$, nasce la trasformazione naturale tra i funtori H^A e $\bigotimes_{i \in I} H^{A_i}$

$$(2.10^*) \quad T^A : H^A \longrightarrow \bigotimes_{i \in I} H^{A_i},$$

definita dualmente alla (2.10).

Ciò premesso, si dice che la coppia $(A, \{A \xrightarrow{p_i} A_i\}_{i \in I})$ (dualmente la coppia $(A, \{A_i \xrightarrow{u_i} A\}_{i \in I})$) costituisce un prodotto (dualmente una somma) per la famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$, quando la trasformazione naturale T_A (dualmente T^A) è una equivalenza naturale, ovvero quando il funtore $\bigotimes_{i \in I} H_{A_i}$ (dualmente il funtore $\bigotimes_{i \in I} H^{A_i}$) è rappresentato dal funtore H_A (dualmente dal funtore H^A). Indicheremo un tale prodotto (dualmente somma) col simbolo $\prod_{i \in I} A_i$ (dualmente col simbolo $\sum_{i \in I} A_i$).

Dimostriamo due proposizioni.

I) Ogni categoria dotata di $n + 1$ oggetti (di cui uno nullo), finita sui morfismi e che ammette prodotti finiti, è del tipo $\mathfrak{A}_{0,n}$.

Dimostrazione. Siano $A_0 = 0, A_1, A_2, \dots, A_n$ gli oggetti di una categoria $\mathfrak{A}$, finita sugli oggetti e dotata di prodotti finiti. Per ipotesi esiste il prodotto $\prod_{h=0}^n A_h$, cioè esiste un $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ tale che:

$$(2.11) \quad \prod_{h=0}^n A_h = (A_i, \{A_i \xrightarrow{p_h} A_h\}_{h \in \{0, 1, 2, \dots, n\}}).$$

Se $i = 0$, ovvero $\prod_{h=0}^n A_h = 0$, dalla definizione richiamata di prodotto si trae che, per ogni $k = 0, 1, 2, \dots, n$:

$$T_0(A_k) : \text{Hom}(A_k, 0) \longrightarrow \prod_{h=0}^n \text{Hom}(A_k, A_h)$$

è una biiezione. Posto allora $|\text{Hom}(A_k, A_h)| = d_h^k$, e ricordando che $|\text{Hom}(A_k, 0)| = 1$, si ottiene:

$$(2.12) \quad 1 = \prod_{h=0}^n d_n^k = \prod_{h=1}^n d_n^k;$$

di qui, essendo ciascun d_h^k un intero positivo, segue:

$$(2.13) \quad |\text{Hom}(A_k, A_h)| = d_h^k = 1, \quad \forall h, k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

e pertanto si ha:

$$(2.14) \quad \text{Hom}(A_k, A_h) = \{A_k \longrightarrow 0 \longrightarrow A_h\}.$$

Sia invece $i \neq 0$, cioè $\prod_{h=0}^n A_h \neq 0$; sempre dalla (2.11) si trae che, per ogni $k = 0, 1, 2, \dots, n$, l'applicazione

$$T_{A_i}(A_k) : \text{Hom}(A_k, A_i) \longrightarrow \prod_{h=0}^n \text{Hom}(A_k, A_h)$$

è una biiezione; con ovvio significato dei simboli, si ha allora:

$$d_i^k = d_0^k d_1^k \cdots d_i^k \cdots d_n^k \Rightarrow 1 = d_0^k d_1^k \cdots d_{i-1}^k \cdot d_{i+1}^k \cdots d_n^k;$$

3. CATEGORIE CON UN NUMERO FINITO DI OGGETTI E CON HOM INFINITI

Dimostriamo la proposizione:

III) *Detta $\mathcal{A}$ una qualunque categoria dotata di prodotti finiti in cui ogni endomorfismo (cioè ogni morfismo con dominio=codomio) sia un mono-epimorfismo, per ogni oggetto A di $\mathcal{A}$ risulta*

$$(3.1) \quad [A \amalg A = (A, p_1, p_2)] \Rightarrow [A \text{ oggetto finale}].$$

Dimostrazione. Sia $A \xrightarrow{q} A$ l'unico morfismo che rende commutativo il seguente diagramma:

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccccc} & & A & \xleftarrow{p_1} & A & \xrightarrow{p_2} & A \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & A & & A & & A \\ & \swarrow & & & & & \searrow \\ & & & & & & & \end{array} \quad ,$$

cioè tale che $p_1 q = 1 = p_2 q$; dall'ipotesi fatta sugli endomorfismi segue allora che:

$$(3.3) \quad p_1 = p_2 = p.$$

Dalla (3.3) e dall'ipotesi fatta sul prodotto $A \amalg A$ si trae che, per ogni oggetto X di $\mathcal{A}$ e qualunque siano $X \xrightarrow{x} A$ ed $X \xrightarrow{y} A$, esiste un unico morfismo $X \xrightarrow{z} A$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$(3.4) \quad \begin{array}{ccccc} & & A & \xleftarrow{p} & A & \xrightarrow{p} & A \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & A & & A & & A \\ & \swarrow & & & & & \searrow \\ & & & & & & & \end{array} \quad ,$$

ovvero per ogni $x, y \in \text{Hom}(X, A)$ si ha $x = y$, cioè

$$|\text{Hom}(X, A)| = 1, \quad \forall X \in \mathcal{A},$$

onde l'asserto.

Dalla Proposizione III si trae subito la

IV) *Non esiste una categoria abeliana con un solo oggetto non nullo, con Hom infinito, ed in cui ogni morfismo non nullo sia un mono-epimorfismo (cioè un isomorfismo).*

Proviamo ora il seguente Lemma:

V) *In ogni categoria $\mathcal{A}$ dotata di prodotti finiti si ha ⁽¹⁾:*

$$(3.5) \quad \left(\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{i_1} & B_1 \\ A_2 & \xrightarrow{i_2} & B_2 \end{array} \right) \Rightarrow (A_1 \amalg A_2 \xrightarrow{i} B_1 \amalg B_2).$$

(1) In ciò che segue il simbolo $A \xrightarrow{i} B$ sta ad indicare che A è sotto-oggetto di B .

In particolare:

$$(A' \simeq A, B' \simeq B) \Rightarrow (A' \amalg B' \simeq A \amalg B).$$

Dimostrazione. Posto $B_1 \amalg B_2 = (P, P \xrightarrow{p_1} B_1, P \xrightarrow{p_2} B_2)$ ed $A_1 \amalg A_2 = (Q, Q \xrightarrow{q_1} A_1, Q \xrightarrow{q_2} A_2)$, dalla definizione di prodotto si trae che esiste un unico morfismo $Q \xrightarrow{i} P$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$(3.6) \quad \begin{array}{ccccc} & & B_1 & \xleftarrow{p_1} & P & \xrightarrow{p_2} & B_2 & & \\ & & \uparrow i_1 & & \uparrow i & & \uparrow i_2 & & \\ & & A_1 & \xleftarrow{q_1} & Q & \xrightarrow{q_2} & A_2 & & \end{array}$$

Si dimostra subito che $Q \xrightarrow{i} P$ è un monomorfismo: considerati infatti due morfismi $x, y \in \text{Hom}(X, Q)$ (ove X è un qualunque oggetto di $\mathcal{A}$) tali che $ix = iy$, dalla commutatività del diagramma:

$$(3.7) \quad \begin{array}{ccccc} & & B_1 & \xleftarrow{p_1} & P & \xrightarrow{p_2} & B_2 & & \\ & & \uparrow i_1 & & \uparrow i & & \uparrow i_2 & & \\ & & A_1 & \xleftarrow{q_1} & Q & \xrightarrow{q_2} & A_2 & & \\ & & \swarrow & & \uparrow x, y & & \searrow & & \\ & & X & & & & & & \end{array}$$

segue:

$$\left. \begin{array}{l} i_1(q_1 x) = p_1(ix) = p_1(iy) = i_1(q_1 y) \\ i_2(q_2 x) = p_2(ix) = p_2(iy) = i_2(q_2 y) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_1 x = q_1 y \\ q_2 x = q_2 y \end{array} \right\} \Rightarrow x = y,$$

onde l'asserto.

Siamo ora in grado di provare la

VI) *In ogni categoria con due oggetti, e dotata di prodotti finiti, gli oggetti sono idempotenti rispetto al prodotto.*

Dimostrazione. Siano A e B gli unici oggetti di una categoria soddisfacente le assunzioni dell'enunciato e supponiamo che risulti $A \amalg A = B$ e $B \amalg B = A$. Le possibili tavole moltiplicative tra gli oggetti di $\mathcal{A}$ sono allora:

$$(3.8) \quad \begin{array}{c|c|c} \amalg & A & B \\ \hline A & B & B \\ \hline B & B & A \end{array}, \quad \begin{array}{c|c|c} \amalg & A & B \\ \hline A & B & A \\ \hline B & A & A \end{array}.$$

Ricordiamo ora che in una qualsivoglia categoria con prodotti finiti, presi comunque tre oggetti A, B, C valgono le relazioni (cfr. [3] pag. 51, [2] pag. 334):

$$(3.9) \quad (A \amalg B) \amalg C = A \amalg B \amalg C = A \amalg (B \amalg C),$$

$$(3.10) \quad A \amalg B = B \amalg A.$$

Dalla prima delle (3.8), dalla (3.9) e dalla Proposizione III del n. 3 segue:

$$(3.11) \quad A = B \amalg B \simeq (A \amalg B) \amalg B \simeq A \amalg (B \amalg B) \simeq A \amalg A = B.$$

Dalla seconda delle (3.8), dalla (3.9) e dalla Proposizione III del n. 3 si trae:

$$(3.12) \quad B = A \amalg A \simeq (B \amalg A) \amalg A \simeq B \amalg (A \amalg A) \simeq B \amalg B = A.$$

Le (3.11) e (3.12) implicano che in ogni caso è:

$$(3.13) \quad A \simeq B,$$

e quindi, a meno di isomorfismi,

$$A \amalg A = A, \quad B \amalg B = B,$$

onde l'asserto.

Dalle Proposizioni III e VI segue subito la

VII) *Non esiste una categoria abeliana con due oggetti non nulli, con Hom infiniti ed in cui ogni endomorfismo sia un mono-epimorfismo.*

La Proposizione VII si generalizza nella

VIII) *Non esiste una categoria abeliana dotata di $n + 1$ oggetti, con Hom infiniti ed in cui ogni endomorfismo sia un mono-epimorfismo.*

Dimostrazione. Proviamo intanto che, nelle ipotesi ammesse si ha:

$$(3.14) \quad [A \amalg B = (A, A \xrightarrow{p_1} A, A \xrightarrow{p_2} B)] \mid \Rightarrow [B = 0].$$

Per ogni $x \in \text{Hom}(A, B)$, sia $A \xrightarrow{z} A$ l'unico morfismo che rende commutativo il seguente diagramma:

$$(3.15) \quad \begin{array}{ccccc} & & A & \xrightarrow{p_2} & B \\ & \swarrow & \uparrow & \nearrow & \\ & A & \xrightarrow{z} & A & \\ & \nwarrow & \downarrow & \searrow & \\ & & A & \xrightarrow{p_1} & A \end{array},$$

cioè tale che: $p_1 z = p_1$, $p_2 z = x$. Dalla commutatività del diagramma (3.15), e dall'ipotesi fatta sugli endomorfismi, segue $z = 1_A$, $p_2 = p_2 z = x$, cioè:

$$(3.16) \quad \text{Hom}(A, B) = \{A \xrightarrow{p_2} B\}.$$

Dall'essere p_2 un epimorfismo e dalla (3.16), si trae:

$$\forall x, y \in \text{Hom}(B, B) \quad , \quad x p_2 = p_2 = y p_2 \mid \Rightarrow x = y = 1_B;$$

in particolare si ha $B \longrightarrow 0 \longrightarrow B = B \xrightarrow{-1} B$ e quindi $B = 0$, cioè l'asserto. L'implicazione inversa della (3.14) è evidente.

Osserviamo poi che – come è facile provare – se $\prod_{i \in I} A_i = (A, \{A \xrightarrow{p_i} A_i\}_{i \in I})$, per ogni permutazione $\sigma: I \longrightarrow I$ si ha che:

$$(3.17) \quad \prod_{i \in I} A_{\sigma(i)} = (A, \{A \xrightarrow{p_{\sigma(i)}} A_{\sigma(i)}\}_{i \in I}).$$

Ciò premesso, siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ gli oggetti non nulli di $\mathfrak{A}$ e supponiamo che $\prod_{h=1}^n A_h = A_j$; posto $\bar{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ e considerata la permutazione $\sigma: \bar{N} \longrightarrow \bar{N}$ tale che $\sigma(1) = j$, dalle (3.17) e (3.9) si deduce:

$$(3.18) \quad A_j = \prod_{h=1}^n A_h = \prod_{h=1}^n A_{\sigma(h)} = A_j \Pi \left(\prod_{h=2}^n A_{\sigma(h)} \right).$$

Dalle (3.18) e (3.14) segue che:

$$\prod_{h=2}^n A_{\sigma(h)} = 0, \quad \text{cioè } \forall h = 2, 3, \dots, n, A_{\sigma(h)} = 0.$$

L'asserto segue ora subito dalla Proposizione IV.

4. ESISTENZA DI CATEGORIE ABELIANE DOTATE DI UN NUMERO FINITO DI OGGETTI E CON HOM INFINITI.

Allo scopo di fornire un esempio di categoria abeliana dotata di un solo oggetto non nullo e con Hom infinito, premettiamo le seguenti considerazioni.

Sia M un sottogruppo massimale del gruppo Z degli interi relativi. Denotato con N l'insieme dei numeri naturali, si riconosce subito che:

IX) $M^N = M \otimes M \otimes \dots$ è un sottogruppo massimale di $Z^N = Z \otimes Z \otimes \dots$.

X) Il gruppo quoziente $G = Z^N/M^N$ è semplice.

Si ha inoltre evidentemente che:

$$(4.1) \quad Z^N/M^N \simeq Z/M \otimes Z/M \otimes \dots$$

Dalla (4.1) segue immediatamente che:

$$(4.2) \quad G \otimes G \simeq G.$$

Considerati allora gli endomorfismi di G definiti col porre

$$p_1: (a_0, a_1, a_2, \dots) + M^N \in G \longrightarrow (a_0, a_2, a_4, \dots) + M^N \in G,$$

$$p_2: (a_0, a_1, a_2, \dots) + M^N \in G \longrightarrow (a_1, a_3, a_5, \dots) + M^N \in G,$$

$$u_1: (a_0, a_1, a_2, \dots) + M^N \in G \longrightarrow (a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \dots) + M^N \in G,$$

$$u_2: (a_0, a_1, a_2, \dots) + M^N \in G \longrightarrow (0, a_0, 0, a_1, 0, a_2, \dots) + M^N \in G,$$

si riconosce subito che p_1 e p_2 sono epimorfismi, u_1 e u_2 monomorfismi e che valgono le relazioni:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} p_i \circ u_i &= I_G, & p_i \circ u_j &= O_G & (i, j = 1, 2, i \neq j) \\ u_1 \circ p_1 + u_2 \circ p_2 &= I_G. \end{aligned}$$

Le (4.3) ci assicurano (cfr. [1], pag. 50) che la categoria che ha per oggetti i gruppi (O) e G e per morfismi gli omomorfismi gruppali verifica gli assiomi A₁, A₁*; inoltre la Proposizione X, in base a quanto detto nel secondo capoverso del n. 2, ci permette di affermare che la suddetta verifica anche gli assiomi A₀, A₂, A₂*, A₃ e A₃*; essa fornisce, pertanto, un esempio di categoria abeliana dotata di un solo oggetto non nullo e con Hom infinito.

Dalla Proposizione VI si trae poi subito che:

XI) *In ogni categoria abeliana, avente due oggetti non nulli e con Hom infiniti, gli oggetti sono idempotenti rispetto al prodotto.*

BIBLIOGRAFIA

- [1] P. FREYD, *Abelian categories*, Arper and Row, 1964.
- [2] P. GABRIEL, *Des categories abeliennes*, « Bull. Soc. Math. de France », 90, 323-448 (1962).
- [3] S. MACLANE, *Categorical algebra*, « Bull. Am. Math. Soc. », 71, 40-106 (1965).