Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Sur l'inéquation d'évolution de Navier-Stokes. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.4, p. 457–460.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_4_457_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Matematica. — *Sur l'inéquation d'évolution de Navier–Stokes.* Nota I di MARCO BIROLI (*), presentata (**) dal Corrisp. L. AMERIO.

RIASSUNTO. — Si enunciano dei risultati concernenti il problema di Cauchy ed il problema della soluzione limitata o quasi periodica per la disequazione di Navier–Stokes.

§ 1. INTRODUCTION ET ÉNONCÉS

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^2$ et indiquons

$$\mathcal{V} = \{\varphi \mid \varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^2 \operatorname{div} \varphi = 0\}$$

$$H = \mathcal{L}^2(\Omega) \qquad V = \overline{\mathcal{V}}^{H_0^1(\Omega)}.$$

Supposons que H soit doué de la norme $|\ |$ et du produit scalaire $(\ ,\ )$ usuelles et que V soit doué de la norme $\|\ \|$ usuelle sur $H_0^1(\Omega)$.

Supposons, enfin, que V soit identifié avec un sous–espace de H; indiquons par V^* le dual de V, par $\langle\ ,\ \rangle$ la dualité entre V et V^*, par $\|\ \|^*$ la norme duale sur V^*.

Posons $\forall u, v, w \in V$

$$a(u, v) = \sum_{ij=1}^{2}{}' \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x)\, dx$$

$$b(u, v, w) = \sum_{ij=1}^{2} \int_\Omega u_i(x) \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x)\, w_i(x)\, dx.$$

Considérons la formulation vectorielle de l'équation de Navier–Stokes:

$$\left\langle \frac{du}{dt}(t), v\right\rangle + \nu a(u(t), v) + b(u(t), u(t), v) = f(t) \tag{1,1}$$

$$\nu > 0 \quad , \quad \forall v \in V \quad \text{p.p. sur } \mathbf{R}.$$

G. Prouse [9], a traité pour l'équation (1,1) le problème de la solution bornée et presque périodique et a demontré le resultat suivant:

THÉORÈME 1. – *Supposons que* $f(t) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{R}; H)$; *l'équation* (1,1) *a une solution* $u(t)$ *bornée dans* H *et* S^2*–bornée dans* V.

(*) Istituto di Matematica del Politecnico di Milano. Lavoro eseguito usufruendo di una borsa di studio del C.N.R. presso l'Università di Parigi.
(**) Nella seduta del 12 febbraio 1972.

Soit, maintenant, $\|f(t)\|_{\mathfrak{L}^\infty(\mathbf{R};\mathrm{H})} \leq c(\alpha,\nu)$ (ou α est la constante d'injection de V dans H); *l'équation* (1,1) *a une unique solution* $u(t)$ *telle que* $\sup\limits_{\mathbf{R}} |u(t)| \leq c'(\alpha,\nu)$. *Si, en plus,* $f(t)$ *est presque périodique dans* H, $u(t)$ *est presque périodique dans* H *et* S^2*-presque périodique dans* V.

Soit maintenant **K** un ensemble fermé convexe de V avec $0 \in \mathbf{K}$; considérons la suivante inéquation d'évolution de Navier–Stokes

$$
(1,2) \qquad \begin{aligned}
&\int_0^{\mathrm{T}} \left\{ \left\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u(t) \right\rangle + \nu a(u(t), v(t) - u(t)) + \right. \\
&\left. + b(u(t), u(t), v(t) - u(t)) - \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \right\} dt \geq 0 \\
&\forall v(t) \in \mathfrak{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{V}) \quad \text{avec} \quad \frac{dv}{dt}(t) \in \mathfrak{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{H}) \\
&v(0) = 0 \qquad v(t) \in \mathbf{K} \quad \text{p.p. sur} \quad [0,\mathrm{T}] \\
&u(t) \in \mathfrak{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{V}) \cap \mathfrak{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathrm{H}) \qquad u(t) \in \mathbf{K} \quad \text{p.p. sur} \quad [0,\mathrm{T}].
\end{aligned}
$$

J. L. Lions a démontré le resultat suivant, concernant le problème (1,2), [8] pg. 395.

THÉORÈME 2. – *Soit* $f(t) \in \mathfrak{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{V}^*)$ *et suppons que l'hypothèse suivante, concernante l'ensemble* **K**, *soit verifiée*

$$
(\mathrm{H}) \qquad a(v,v) + b(v,\varphi,v) \geq 0 \qquad \forall \varphi \in \mathbf{K} \quad , \quad v \in \mathrm{V}.
$$

Le problème (1,2) *a une unique solution* $u(t)$.

J. L. Lions a posé, [8] pg. 426 11.5, la question de démontrer la thèse du Théorème 2 sans l'hypothèse (H).

Le bût de ce travail est donner une réponse positive à la question de J. L. Lions et examiner, pour l'inéquation d'évolution de Navier–Stokes, le problème de la solution bornée et presque périodique.

Enonçons les deux resultats, qui sont démontrés dans ce travail.

Considérons $u_0 \in \overline{\mathrm{K}}^{\mathrm{H}}$, $f(t) \in \mathfrak{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{V}^*)$ et le problème

$$
(1,3) \qquad \begin{aligned}
&\int_0^{t} \left\{ \left\langle \frac{dv}{dt}(s), v(s) - u(s) \right\rangle + \nu a(u(s), v(s) - u(s)) + \right. \\
&\left. + b(u(s), u(s), v(s) - u(s)) - \langle f(s), v(s) - u(s) \rangle \right\} ds \geq \\
&\geq \frac{1}{2} \{ |v(t) - u(t)|^2 - |v(0) - u_0|^2 \}, \qquad t \in [0,\mathrm{T}] \\
&\forall v(t) \in \mathfrak{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{V}) \quad \text{avec} \quad \frac{dv}{dt}(t) \in \mathfrak{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{H}) \\
&v(t) \in \mathbf{K} \quad \text{p.p. sur} \quad [0;\mathrm{T}] \\
&u(t) \in \mathfrak{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{V}) \cap \mathrm{C}(0,\mathrm{T};\mathrm{H}) \qquad u(t) \in \mathbf{K} \quad \text{p.p.} \\
&\text{sur} \quad [0,\mathrm{T}] \quad , \quad u(0) = u_0 .
\end{aligned}
$$

THÉORÈME 3. – *Le problème* (1,3) *a une unique solution* $u(t)$.

Remarque 1. – Le problème (1,3) est une formulation plus forte que le problème (1,2) pour l'inéquation d'évolution de Navier–Stokes.

Considérons, maintenant, le problème.

$$(1,4) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u(t) \right\rangle + \nu a(u(t), v(t) - u(t)) + \right.$$

$$\left. + b(u(t), u(t), v(t) - u(t)) - \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \right\} dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \{ |v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2 \} ; \qquad t_1, t_2 \in \mathbf{R}$$

$$\forall v(t) \in \mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}; \mathrm{V}) \qquad \text{avec} \quad \frac{dv}{dt}(t) \in \mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}; \mathrm{H})$$

$$v(t) \in \mathbf{K} \quad \text{p.p.}$$

$$u(t) \in \mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}; \mathrm{V}) \cap \mathrm{C}(\mathbf{R}; \mathrm{H}) \qquad u(t) \in \mathbf{K} \quad \text{p.p.}$$

THÉORÈME 4. – *Soit* $f(t) \in \mathfrak{L}^\infty(\mathbf{R}; \mathrm{V}^*)$; *le problème* (1,4) *a une solution bornée dans* H *et* S^2*–bornée dans* V.

Si $\|f(t)\|_{\mathfrak{L}^\infty(\mathbf{R};\mathrm{V}^*)} < (\nu\alpha)^2$ *le problème* (1,4) *a une unique solution* $u(t)$ *bornée dans* H *et* S^2*–bornée dans* V, *telle que* $\sup_{\mathbf{R}} |u(t)| < (\nu\alpha)$. *Si, en plus,* $f(t)$ *est presque périodique dans* V^*, $u(t)$ *est presque périodique dans* H *et* S^2*–presque périodique dans* V.

Remarque 2. – Dans le cas de l'équation de Navier–Stokes, $\mathbf{K} = \mathrm{V}$; le Théorème 4 améliore le Théorème 1, puisque il permit de considérer $f(t)$ bornée et presque périodique dans V^* plutôt que dans H.

Dans le § 2 on démontre le Théorème 3, dans le § 3 on démontre le Théorème 4, dans le § 4 on donne un exemple d'application des Théorèmes 3, 4.

Le Théorème 3 est démontré par la méthode de pénalisation et on utilise pour les passages à la limite des procédés semblables à ceux utilisés par l'Auteur dans [5], [6].

Le Théorème 4 est démontré par une méthode classique, [1], [7] et on utilise, pour resoudre les difficultés techniques des passages à la limite, des procédés semblables à ceux utilisés pour la démonstration du Théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. AMERIO et G. PROUSE, *Functional Analysis and almost periodic functions*, Van Nostrand (1971).

[2] BECKENBACH E. F., *Inequalities*, Springer 1969.

[3] BIROLI M., *Solutions presque périodiques des inéquations d'évolution paraboliques*, « Ann. Mat. pura ed app. », ser. VIII, *88*, 51–70 (1971).

[4] BIROLI M., *Sull'unicità della soluzione limitata di una diseguaglianza variazionale*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *48*, 409–411 (1970).

[5] BIROLI M., *Sulla perturbazione delle disequazioni d'evoluzione paraboliche*, « Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa », *25* (1), 1–24 (1971).
[6] BIROLI M., *Ancora sulla perturbazione delle disequazioni d'evoluzione paraboliche – à paraitre*, « Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa ».
[7] BIROLI M., *Sur les solutions bornées ou presque périodiques des équations d'évolution multivoques sur un espace de Hilbert – à paraitre*, « Ricerche di Matematica ».
[8] LIONS J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod–Gauthier Villars (1969).
[9] PROUSE G., *Soluzioni quasi periodiche dell'equazione di Navier–Stokes in 2 dimensioni*, « Rend. Sem. Padova », *33* (1963).

Nota – J'ai été informé que le Théorème 3 a été démontré dans le même temps indipendemment, par des méthodes differents, par H. Brézis, dans un travail pas encore publié.