

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

# RENDICONTI

---

TULLIO ANTONIO MINELLI, ANDREA VITTURI,  
FRANCESCO ZARDI

## **Sviluppo della matrice di diffusione in serie di potenze del momento e suo prolungamento analitico**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 52 (1972), n.5, p. 734–737.*  
Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1972\\_8\\_52\\_5\\_734\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_5_734_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Fisica teorica.** — *Sviluppo della matrice di diffusione in serie di potenze del momento e suo prolungamento analitico.* Nota di TULLIO ANTONIO MINELLI, ANDREA VITTURI e FRANCESCO ZARDI, presentata (\*) dal Socio A. ROSTAGNI.

SUMMARY. — In the case of scattering processes for cutoff potentials the energy and momentum power expansion of the scattering matrix is considered; the Hadamard method is then used in order to find the affixes of the resonance poles. The basic tool used in this work is the introduction of a modified Green's function and of a Fredholm integral equation correlating this function at two different energies.

L'interpretazione fisica e la descrizione matematica di quei particolari sistemi metastabili che sono le risonanze nucleari, e dei fenomeni a queste associati, hanno costituito fin dal loro primo apparire nel 1936 una delle direttrici attorno cui si è sviluppata la fisica del nucleo. Dal punto di vista metodologico, il fatto che ha contraddistinto questo ramo della fisica nucleare rispetto ad altri, è che le teorie matematiche delle risonanze nucleari sono state formulate in modo sufficientemente rigoroso da poter fornire delle condizioni necessarie atte a stabilire la validità dei modelli fisici che di volta in volta venivano posti alla base della loro interpretazione. Non va dimenticato ad esempio, che uno dei punti fermi su cui poggia il modello a shell del nucleo è costituito dalla violazione delle ipotesi di Bohr sul nucleo composto: proprio in virtù del rigore matematico delle teorie è stato messo in evidenza il disaccordo di queste ipotesi con i dati sperimentali.

Da questi presupposti metodologici trae origine la ricerca presentata in questa Nota.

La definizione matematica di risonanza che si è dimostrata più generale e più feconda è costituita dall'associare tale fenomeno ai poli complessi della matrice di diffusione sul piano dell'energia o del momento. Tuttavia nessuna delle teorie esistenti dà alcuna prescrizione atta a localizzare tali poli, che non sia quella di risolvere l'equazione di Schroedinger in tutto il piano, in modo da stabilire, punto per punto, se si tratti o no di un polo.

Oggetto di questa comunicazione è la descrizione di un metodo tramite il quale è sufficiente, in linea di principio, risolvere l'equazione di Schroedinger per una energia arbitraria per trovare tutti i poli della matrice di diffusione. È evidente che in questo modo è possibile cogliere lo stretto vincolo di interdipendenza fra tutti i punti del piano dell'energia, la cui validità fisica è rimessa ai dati sperimentali.

(\*) Nella seduta del 13 maggio 1972.

Il punto di partenza è costituito dal fatto ben noto che l'elemento di matrice di diffusione di una generica onda parziale relativo ad un potenziale di raggio finito è una funzione meromorfa del momento [1]. Segue da ciò che tale elemento di matrice è sviluppabile in serie di Taylor nell'intorno di un punto regolare; la teoria del prolungamento analitico di Weierstrass permette di estendere la conoscenza della funzione oltre il raggio di convergenza della serie, per cui, in linea di principio, il valore della funzione in ciascun punto è determinato dal valore della funzione e delle sue derivate in un punto regolare prescelto.

È da notare però che le derivate rispetto al momento, o rispetto all'energia alla quale è immediatamente riconducibile la variazione del momento, sono fattibili direttamente solo per i rari casi [1] in cui il problema sia risolvibile analiticamente, e che il metodo di Weierstrass è di difficile applicazione pratica.

Per superare queste difficoltà sono necessarie varie considerazioni.

Anzitutto l'elemento di matrice di diffusione è esprimibile tramite la funzione di Green completa relativa a condizioni al contorno di onda uscente [1]. D'altra parte è ben noto in letteratura [1] il problema di correlare una funzione di Green relativa ad un potenziale caratterizzato da un parametro di intensità  $\lambda_0$ , e quella relativa allo stesso potenziale con intensità  $\lambda$ . La correlazione è data, in questo caso, da una equazione integrale di tipo Fredholm. Questa equazione, risolta iterativamente con il metodo di Neumann-Liouville, dà luogo ad una serie di potenze in  $\lambda - \lambda_0$  (serie di Born); le successive iterazioni possono pertanto essere interpretate come le derivate della funzione di Green rispetto all'intensità del potenziale.

La trasposizione di questi risultati al caso qui considerato in cui si vuole correlare la funzione di Green relativa a due energie diverse  $E$  ed  $E_0$  non è immediata. Nel semipiano superiore del momento, infatti, la funzione di Green può essere associata ad un risolvente, per cui vale la seguente relazione [2]

$$\mathfrak{G}(E; r, r') = \mathfrak{G}(E_0; r, r') - (E - E_0) \int_0^{\infty} \mathfrak{G}(E_0; r, r'') \mathfrak{G}(E; r'', r') dr'',$$

alla quale sono direttamente applicabili i procedimenti cui sopra si è fatto riferimento. Questo metodo però non è applicabile nel semipiano inferiore, nel quale sono localizzati i poli relativi alle risonanze. Un possibile superamento di queste difficoltà sulla linea prospettata nella soluzione di analoghi problemi noti in letteratura porterebbe a considerare il prolungamento analitico dell'equazione precedente nel semipiano inferiore, calcolando gli integrali, che qui non convergono, con procedimenti di « regolarizzazione » [3]: la validità di questo metodo va tuttavia verificata caso per caso.

Il metodo qui presentato è basato sulla considerazione che per potenziali a raggio finito è sufficiente, ai fini della determinazione dell'elemento di matrice di diffusione, la conoscenza della funzione di Green nella sola regione di interazione. È degno di nota il fatto che, in questa ipotesi, lo studio del

processo di diffusione può essere ricondotto allo studio di una funzione di Green modificata, definita in questa sola regione ma soggetta a condizioni al contorno dipendenti dall'energia [4]. Tale funzione, che soddisfa alla seguente equazione integrale [5]

$$\bar{\mathfrak{S}}(E; r, r') = \bar{\mathfrak{S}}(E_0; r, r') - (E - E_0) \int_0^a \bar{\mathfrak{S}}(E_0; r, r'') \times \\ \times \{1 + g(E, E_0) \delta(r'' - a)\} \bar{\mathfrak{S}}(E; r'', r') dr'' \quad 0 \leq r, r' \leq a,$$

coincide nell'intervallo di definizione con il prolungamento analitico di  $\mathfrak{S}(E; r, r')$  in tutto il piano del momento di cui è una funzione meromorfa; il termine  $g(E; E_0) \delta(r - a)$ , che dà luogo ad un contributo di superficie, trae origine dalla variazione delle condizioni al contorno fra il punto  $E_0$  ed il punto  $E$ . Il metodo di Neumann-Liouville non fornisce in questo caso le derivate di  $\bar{\mathfrak{S}}(E_0; r, r')$  a causa della dipendenza energetica contenuta nel termine di superficie; si è dimostrato tuttavia che esiste una formula ricorrente che esprime ancora le derivate tramite successive integrazioni di  $\bar{\mathfrak{S}}(E_0; r, r')$  [5] <sup>(1)</sup>.

La serie di Taylor ottenibile in questo modo converge in un cerchio centrato in  $E_0$  e limitato dalla singolarità più vicina a questo punto. In questo modo però vengono esclusi dallo studio proprio i punti di maggiore interesse, vale a dire i poli associati alle risonanze.

Lo studio delle risonanze in questo ambito presuppone perciò la soluzione di due distinti problemi, che sono in linea con due diverse possibili descrizioni del fenomeno. Il primo problema è quello della localizzazione dei poli complessi relativi alle risonanze, il secondo è quello della determinazione del valore che la matrice di diffusione assume per valori reali della energia o del momento in vicinanza di tali poli.

Per la soluzione del primo problema è stato usato un potente metodo analitico dovuto ad Hadamard [6]. Agli Autori non risulta che tale metodo sia stato mai impiegato in precedenza nella teoria quantistica dell'urto. In sostanza, il procedimento di Hadamard consente, a partire dalla serie di Taylor, di localizzare tutti i poli contenuti nel cosiddetto cerchio di meromorfismo, vale a dire nel cerchio centrato in un punto prescelto  $P$  e avente raggio uguale alla distanza della più vicina singolarità non polare. Nella variabile momento tale cerchio coincide con l'intero piano, mentre nella variabile energia il raggio del cerchio è limitato dal fatto che il valore  $E = 0$  è un punto di diramazione.

Il secondo problema, vale a dire quello della determinazione del valore della funzione in esame in ogni punto regolare, si presenta molto più complesso [6, 7]. Al fine di avere una valutazione puramente indicativa, ed anche

(1) Tali risultati sono suscettibili di una coerente interpretazione nell'ambito del formalismo della « regolarizzazione », corrispondendo i termini di superficie ad integrazioni nella regione esterna.

per ragioni euristiche, alla sua soluzione è stato applicato il metodo degli approssimanti di Padé [8] in alcuni problemi d'urto risolvibili in termini finiti. Da questi calcoli è emerso che l'elemento di matrice di diffusione è stato riprodotto con buona approssimazione anche in regioni comprendenti varie risonanze. Il che, fra l'altro, contribuisce a conferire attendibilità al metodo di Padé, il quale a tutt'oggi non possiede un fondamento matematico rigoroso per lo studio delle funzioni meromorfe.

Si ritiene che la linea di pensiero seguita in questa ricerca vada incontro all'esigenza sempre maggiormente avvertita di inquadrare le osservazioni sperimentali in una descrizione entro la quale possa essere riconosciuto il loro carattere di necessità e sufficienza ai fini della conferma di una ipotesi fisica e della teoria costruita su di essa.

Gli Autori desiderano esprimere la loro riconoscenza al prof. C. Villi per le discussioni e il continuo interesse dimostrati per questa ricerca.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] R. G. NEWTON, *Scattering Theory of Waves and Particles* (New York 1966).
- [2] K. YOSHIDA, *Functional Analysis* (Berlino, II edizione, 1968).
- [3] T. BERGGREN, « Nucl. Phys. », 109 A, 265 (1968); W. J. ROMO, « Nucl. Phys. », 116 A, 615 (1968).
- [4] T. A. MINELLI e F. ZARDI, « Nuovo Cimento », 6 A (655) (1971).
- [5] T. A. MINELLI, F. ZARDI e A. VITTURI, « Lettere al Nuovo Cimento », 4 (105) (1972).
- [6] J. HADAMARD, *La Série de Taylor et son Prolongement Analytique* (Paris 1901).
- [7] P. DIENES, *The Taylor Series* (New York 1957).
- [8] G. A. BAKER JR. e J. L. GAMMEL, *The Padé Approximant in Theoretical Physics* (New York 1970).