Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Aurel Bejancu

h—connexions sur h—fibres vectoriels banachiques

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.1, p. 68–74.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_1_68_0>

Geometria differenziale. — *h–connexions sur h–fibrés vectoriels banachiques.* Nota di AUREL BEJANCU, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — In questo lavoro viene studiata una classe di fibrati vettoriali di Banach (h–fibrati). Ogni fibrato tangente ad una varietà è un h–fibrato. Poggiando sulla nozione di h–connessione si ottiene poi un' identità del tipo di quelle di Bianchi. Infine viene stabilito un teorema di esistenza ed unicità per l'h–connessione di Levi–Civita e si generalizza un teorema di Schur.

1. Soient $\pi: M \to B$ un fibré vectoriel banachique de fibre $\mathbf{M}$ et $h: M \to TB$ un 1–morphisme des fibrés vectoriels [1]. Cet fibré est appelé h–fibré et constitue l'objet d'étude pour cette Note. Par $\mathfrak{X}_M(B)$ on désigne le module des C^∞–sections sur B en M.

DÉFINITION 1.1. *Une h–connexion linéaire sur* M *est une application* $\nabla: \mathfrak{X}_M(B) \times \mathfrak{X}_M(B) \to \mathfrak{X}_M(B)$ *telle que pour toute trivialisation locale* (Φ, φ, U) *pour* M *il y a* $\Gamma_\varphi: \varphi(U) \to L_2(\mathbf{M}; \mathbf{M})$ *de classe* C^∞ *tel que*:

$$(1.1) \qquad \nabla_X Y|_{\varphi(x)} = (D_{\varphi(x)} Y_\varphi)(h_{\varphi(x)}(X_{\varphi(x)})) + \Gamma_{\varphi(x)}(X_{\varphi(x)}, Y_{\varphi(x)}).$$

En utilisant (1.1) on peut montrer qu'une h–connexion linéaire est $\mathfrak{X}_{B\times R}(B)$–linéaire par rapport à la première variable, R–linéaire par rapport à la deuxième variable et vérifie la relation

$$\nabla_X(f\cdot Y) = f\cdot\nabla_X Y + (hX)(f)\cdot Y, \qquad \forall f \in \mathfrak{X}_{B\times R}(B), \quad X, Y \in X_M(B).$$

Pour (Φ, φ, U) et $x \in U$ on désigne par $\Phi_x: M_x \to \mathbf{M}$ l'isomorphisme naturel des fibres. Si (Φ, φ, U) et (Ψ, ψ, V) sont deux trivialisations locales et $U \cap V \neq \varnothing$, nous désignons par $T_{\varphi\psi}$ l'application

$$T_{\varphi\psi}: \varphi(U \cap V) \to L(\mathbf{M}, \mathbf{M}) \quad , \quad T_{\varphi\psi}(x) = \Psi_{\varphi^{-1}(x)} \circ \Phi^{-1}_{\varphi^{-1}(x)}.$$

PROPOSITION 1.1. *La liaison entre* Γ_φ *et* Γ_ψ *est donnée par*

$$(1.2) \qquad \Gamma_{\psi(x)}(X_{\psi(x)}, Y_{\psi(x)}) = T_{\varphi\psi}(\varphi(x))\{(D^1_{(\psi(x), Y_{\psi(x)})} T_{\psi\varphi})((hX)_{\psi(x)}) + \\ + \Gamma_{\varphi(x)}(T_{\psi\varphi}(\psi(x))(X_{\psi(x)}), T_{\psi\varphi}(\psi(x))(Y_{\psi(x)}))\}.$$

Démonstration. Les parties principales des sections X et hX sont liées par les relations:

$$(1.3) \quad X_\varphi = (T_{\psi\varphi} \circ \psi \circ \varphi^{-1})\cdot(X_\psi \circ \psi \circ \varphi^{-1}) \quad , \quad (hX)_{\varphi(x)} = D_{\psi(x)}(\varphi \circ \psi^{-1})(hX_{\psi(x)}).$$

Donc on a

$$(1.4) \qquad \nabla_X Y|_{\psi(x)} = T_{\varphi\psi}(\varphi(x))(\nabla_X Y|_{\varphi(x)}).$$

(*) Nella seduta del 9 dicembre 1972

Nous calculons le second membre de cette relation et obtenons

$$T_{\varphi\psi}(\varphi(x))(\nabla_X Y|_{\varphi(x)}) =$$

$$= T_{\varphi\psi}(\varphi(x))\{(D_{\varphi(x)} Y_\varphi)((hX)_{\varphi(x)}) + \Gamma_{\varphi(x)}(X_{\varphi(x)}, Y_{\varphi(x)})\} =$$

$$= T_{\varphi\psi}(\varphi(x))\{(D_{\varphi(x)}(T_{\psi\varphi}\circ\psi\circ\varphi^{-1}\cdot Y_\psi\circ\psi\circ\varphi^{-1})(D_{\psi(x)}(\varphi\circ\psi^{-1})((hX)_{\psi(x)}))) +$$

$$+ \Gamma_{\varphi(x)}(T_{\psi\varphi}(\psi(x))(X_{\psi(x)}), T_{\psi\varphi}(\psi(x))(Y_{\psi(x)}))\} =$$

$$= T_{\varphi\psi}(\varphi(x))\{(D^1_{(\psi(x), Y_{\psi(x)})} T_{\psi\varphi})(D_{\varphi(x)}(\psi\circ\varphi^{-1})(D_{\psi(x)}(\varphi\circ\psi^{-1})((hX)_{\psi(x)})) +$$

$$+ T_{\psi\varphi}(\psi(x))(D_{\psi(x)} Y_\psi \circ D_{\varphi(x)}(\psi\circ\varphi^{-1}) \circ D_{\psi(x)}(\varphi\circ\psi^{-1})((hX)_{\psi(x)})) +$$

$$+ \Gamma_{\varphi(x)}(T_{\psi\varphi}(\psi(x))(X_{\psi(x)}), T_{\psi\varphi}(\psi(x))(Y_{\psi(x)}))\} =$$

$$= (D_{\psi(x)} Y_\psi)((hX)_{\psi(x)}) + T_{\varphi\psi}(\varphi(x))\{(D^1_{(\psi(x), Y_{\psi(x)})} T_{\psi\varphi})((hX)_{\psi(x)}) +$$

$$+ \Gamma_{\varphi(x)}(T_{\psi\varphi}(\psi(x))(X_{\psi(x)}), T_{\psi\varphi}(\psi(x))(Y_{\psi(x)}))\}.$$

Compte tenu de (1.1) et de cette relation en (1.4) on a (1.2), *q.e.d.*

Nous supposons maintenant que $\pi : M \to B$ est un h–fibré vectoriel et pour toute trivialisation (Φ, φ, U) il y a une C^∞–application $\Gamma_\varphi : \varphi(U) \to L_2(\mathbf{M}; \mathbf{M})$ qui vérifie (1.2). Nous définissons $\nabla : \mathfrak{X}_M(B) \times \mathfrak{X}_M(B) \to \mathfrak{X}_M(B)$ par la formule

$$(\nabla_X Y)(x) = (\Phi_x)^{-1}\{(D_{\varphi(x)} Y_\varphi)((hX)_{\varphi(x)}) + \Gamma_{\varphi(x)}(X_{\varphi(x)}, Y_{\varphi(x)})\}.$$

De (1.2) il résulte que le deuxième membre de cette relation est indépendant de trivialisation et donc nous avons obtenu le

THÉORÈME 1.1. *Il existe une h–connexion sur un h–fibré vectoriel si, et seulement si, pour toute trivialisation locale* (Φ, φ, U) *il existe une* C^∞*–application* Γ_φ *vérifiant* (1.2).

Nous désignons $h_x = h|_{M_x}$, $h_\varphi : \varphi(U) \to L(\mathbf{M}; \mathbf{E})$ ($\mathbf{E}$ est l'espace de Banach modèle pour B), $h_\varphi(\varphi(x)) = \tilde{\Phi}_x \circ h_x \circ \Phi_x^{-1}$ où (Φ, φ, U) [resp. $(\tilde{\Phi}, \varphi, U)$] est une trivialisation pour M [resp. TB] et définissons localement la h–torsion T et la h–courbure R pour ∇, par les formules:

$$T_\varphi(x; u, v) = \Gamma_\varphi(x; u, v) - \Gamma_\varphi(x; v, u), \tag{1.5}$$

$$R_\varphi(x; u, v, w) = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x}\right)(x; v, w)(h_{\varphi(x)}(u)) - \tag{1.6}$$

$$- \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x}\right)(x; u, w)(h_{\varphi(x)}(v)) + \Gamma_{\varphi(x)}(u, \Gamma_{\varphi(x)}(v, w)) - \Gamma_{\varphi(x)}(v, \Gamma_{\varphi(x)}(u, w)).$$

Vu que nous travaillons dans une seule carte locale nous omettons l'indice φ et $h_{\varphi(x)}$ est notées aussi par h.

DÉFINITION 1.2. *La h–dérivée covariante pour la* C^∞*–application* $S : \varphi(U) \to L_p(\mathbf{M};\mathbf{M})$ *par rapport à l'h–connexion* ∇ *en direction* $u \in \mathbf{M}$ *est l'application* $\nabla_u S : \varphi(U) \to L_p(\mathbf{M};\mathbf{M})$ *telle que*

$$(1.7) \qquad (\nabla_u S)(x; u_1, \cdots, u_p) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)(x; u_1, \cdots, u_p)(hu) +$$

$$+ \Gamma(x; u, S(x; u_1, \cdots, u_p)) - \sum_{i=1}^{p} S(x; u_1, \cdots, \Gamma(x; u, u_i), \cdots, u_p).$$

Compte tenu de (1.5), (1.6) et (1.7) nous obtenons le

THÉORÈME 1.2 (*identités de type Bianchi*). *La h–torsion et la h–courbure d'une h–connexion vérifient les identités*:

$$(1.8) \qquad \sum_{cycl}^{(\lambda,u,v)} \{(\Delta_\lambda R)(x; u, v, w) + R(x; T(x; \lambda, u), v, w)\} = 0,$$

$$(1.9) \qquad \sum_{cycl}^{(u,v,w)} \{(\nabla_u T)(x; v, w) - R(x; u, v, w) + T(x; T(x; u, v), w)\} = 0.$$

Si en particulier $T = 0$, on a

$$(1.10) \qquad \sum_{cycl}^{(\lambda,u,v)} (\nabla_\lambda R)(x; u, v, w) = 0,$$

$$(1.11) \qquad \sum_{cycl}^{(u,v,w)} R(x; u, v, w) = 0.$$

2. Dans ce qui suit nous supposons que B a des C^∞–partitions de l'unité et $\pi : M \to B$ est un *h*–fibré vectoriel dont les fibres sont des espaces vectoriels hilbertisables. Alors M possède une métrique riemannienne, g ([4], p. 104).

DÉFINITION 2.1. *Une h–connexion sur* M *s'appelle riemannienne si dans chaque trivialisation locale* (Φ, φ, U) *on a*

$$(2.1) \qquad \left(\frac{\partial g_\varphi}{\partial x}\right)(x; u, v)(hw) - g_\varphi(x; \Gamma_\varphi(x; w, u), v) - g_\varphi(x; u, \Gamma_\varphi(x; w, v)) = 0$$

pour tout $x \in \varphi(U)$ *et* $u, v, w \in \mathbf{M}$.

Si la *h*–connexion riemannienne a la torsion nulle, alors elle s'appelle *h*–connexion de Levi–Civita.

PROPOSITION 2.1. *Les coefficients d'une h–connexion de Levi–Civita vérifient la relation*

$$(2.2) \qquad g(x; \Gamma(x; u, w), v) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x; u, v)(hw) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x; v, w)(hu) - \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x; u, w)(hv)\right\}.$$

Démonstration. Après des permutations circulaires de (u , v , w) dans (2.1) on a

$$(2.3)\qquad \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x\,;v\,,w)\,(hu) - g(x\,;\Gamma(x\,;u\,,v)\,,w) - g(x\,;v\,,\Gamma(x\,;u\,,w)) = 0\,,$$

$$(2.4)\qquad \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x\,;w\,,u)\,(hv) - g(x\,;\Gamma(x\,;v\,,w)\,,u) - g(x\,;w\,,\Gamma(x\,;v\,,u)) = 0\,.$$

La relation (2.4) multipliée par (-1) et après additionée aux (2.1) et (2.3) donne (2.2), vu que la h–torsion est nulle, *q.e.d.*

Dans ce qui suit nous étudierons les h–fibrés qui vérifient:

$$(2.5)\qquad \left(\frac{\partial T_{\varphi\psi}}{\partial x}\right)(\varphi(p)\,,u)\,(h_{\varphi(x)}(v)) = \left(\frac{\partial T_{\varphi\psi}}{\partial x}\right)(\varphi(p)\,,v)\,(h_{\varphi(x)}(u))\,.$$

Le fibré tangent à B et tout h–fibré trivial vérifient (2.5).

THÉORÈME 2.1 (*théorème d'existence et d'unicité*). *Sur tout h–fibré il existe une seule h–connexion de Levi–Civita.*

Démonstration. Nous considérons (2,2) comme relation de définition pour les coefficient de la h–connexion dans la trivialisation $(\Phi\,,\varphi\,,U)$. Compte tenu du fait que h est un morphisme des fibrés vectoriels nous obtenons

$$(2.6)\qquad D_{\psi(p)}(\varphi\circ\psi^{-1})\,(h_{\psi(p)}\,u) = h_{\varphi(p)}(T_{\psi\varphi}(\psi(p))\,(u))\,,\qquad p\in U\cap V.$$

La métrique riemannienne g vérifie la relation

$$(2.7)\qquad g_{\psi} = (g_{\varphi}\circ\varphi\circ\psi^{-1})\cdot(T_{\psi\varphi}\,,T_{\psi\varphi})\,.$$

Nous calculons la dérivée Fréchet de g_{ψ} en direction $h_{\psi(p)}(w)$:

$$(2.8)\qquad \left(\frac{\partial g_{\psi}}{\partial x}\right)(\psi(p)\,;u\,,v)\,(h_{\psi(p)}(w)) =$$
$$= g_{\varphi(p)}\left(\left(\frac{\partial T_{\psi\varphi}}{\partial x}\right)(\psi(p)\,,u)\,(h_{\psi(p)}(w))\,,T_{\psi\varphi}(\psi(p))\,(v)\right) +$$
$$+ g_{\varphi(p)}\left(T_{\psi\varphi}(\psi(p))\,(u)\,,\left(\frac{\partial T_{\psi\varphi}}{\partial x}\right)(\psi(p)\,,v)\,(h_{\psi(p)}(w))\right) +$$
$$+ \left(\frac{\partial g_{\varphi}}{\partial x}\right)(\varphi(p)\,;T_{\psi\varphi}(\psi(p))\,(u)\,,T_{\psi\varphi}(\psi(p))\,(v))\,(D_{\psi(p)}(\varphi\circ\psi^{-1})\,(h_{\psi(p)}\,w))\,.$$

En utilisant (2.2), (2.7) et (2.8) nous obtenons

$$g_{\varphi(p)}(T_{\psi\varphi}(\psi(p))\,(\Gamma_{\psi(p)}(u\,,v))\,,T_{\psi\varphi}(\psi(p))\,(w)) =$$
$$= g_{\varphi(p)}\left(\Gamma_{\varphi(p)}(T_{\psi\varphi}(\psi(p))\,(u)\,,T_{\psi\varphi}(\psi(p))\,(v))\,,T_{\psi\varphi}(\psi(p))\,(w)\right) +$$
$$+ g_{\varphi(p)}\left(\left(\frac{\partial T_{\psi\varphi}}{\partial x}\right)(\psi(p)\,,u)\,(h_{\psi(p)}(v))\,,T_{\psi\varphi}(\psi(p))\,(w)\right).$$

Vu que $T_{\psi\varphi}(\psi(p))$ est un isomorphisme, la dernière relation nous donne (1.2), c'est–à–dire l'application Γ_{φ} donnée par (2.2) définit une h–connexion. Il est aisé de voir que cette h–connexion est une h–connexion de Levi–Civita. Si Γ' est une autre h–connexion de Levi–Civita il est clair qu'elle vérifie (2.2), d'où $\Gamma = \Gamma'$ et donc la h–connexion de Levi–Civita est unique, *q.e.d.*

À l'aide de la h–courbure nous introduisons le tenseur de h–courbure de Riemann par la formule

$$R(x\,;v_1\,,v_2\,,v_3\,,v_4) = g(x\,;R(x\,;v_3\,,v_4\,,v_2)\,,v_1)\,.$$

PROPOSITION 2.2. *Le tenseur de h–courbure de Riemann vérifie*:

$$\text{I)}\quad R(x\,;v_1\,,v_2\,,v_3\,,v_4) = -R(x\,;v_1\,,v_2\,,v_4\,,v_3)\,,$$

$$\text{II)}\quad R(x\,;v_1\,,v_2\,,v_3\,,v_4) = -R(x\,;v_2\,,v_1\,,v_3\,,v_4)\,,$$

$$\text{III)}\quad \sum_{cycl}^{(v_2,v_3,v_4)} R(x\,;v_1\,,v_2\,,v_3\,,v_4) = 0\,.$$

Démonstration. I) résulte de l'antisymétrie de $R(x\,;v_3\,,v_4\,,v_2)$ par rapport à $v_3\,,v_4$ et III) est un corollaire des identités de Bianchi (1.11). Pour II) nous calculons la dérivée Fréchet de (2.2) et obtenons

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)(x\,;u\,,v)\,(hw\,,h\lambda) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x\,;\Gamma(x\,;w\,,u)\,,v)\,(h\lambda) + \tag{2.9}$$
$$+ g\left(x\,;\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x}\right)(x\,;w\,,u)\,(h\lambda)\,,v\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x\,;\Gamma(x\,;w\,,v)\,,u)\,(h\lambda) +$$
$$+ g\left(x\,;\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x}\right)(x\,;w\,,v)\,(h\lambda)\,,u\right).$$

Compte tenu de (2.9) et (2.2) dans l'expression de la courbure de Riemann, après des réductions de termes on a:

$$R(x\,;v_1\,,v_2\,,v_3\,,v_4) = g\left(x\,;\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x}\right)(x\,;v_3\,,v_1)\,(hv_4)\,,v_2\right) -$$
$$- g\left(x\,;\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x}\right)(x\,;v_4\,,v_1)\,(hv_3)\,,v_2\right) + g(x\,;\Gamma(x\,;v_4\,,\Gamma(x\,;v_3\,,v_1))\,,v_2) -$$
$$- g(x\,;\Gamma(x\,;v_3\,,\Gamma(x\,;v_4\,,v_1))\,,v_2) = g(x\,,R(x\,;v_4\,,v_3\,,v_1)\,,v_2) =$$
$$= R(x\,;v_2\,,v_1\,,v_4\,,v_3) = -R(x\,;v_2\,,v_1\,,v_3\,,v_4)\,, \qquad q.e.d.$$

Remarque. Vu que nous n'avons pas des expressions globales pour la h–courbure et la h–torsion, la démonstration de II) est différente de celle globale connue dans le cas des variétés de dimension finie [3].

Pour introduir la courbure sectionnelle d'un h–fibré riemannien, nous rappelerons ici quelques résultats algébriques dont la démonstration se fait d'une même manière comme pour les espaces vectoriels de dimension finie.

Soient $\mathbf{M}$ un espace de Hilbert et $R_1\,,R_2$ deux applications 4–linéaires sur $\mathbf{M}$ à valeurs réelles.

PROPOSITION 2.3 (*Gheorghiev Gh., Oproiu V.*). *Si* R_1 *et* R_2 *vérifient* I), II), III) *et* $R_1(u\,,v\,,u\,,v) = R_2(u\,,v\,,u\,,v)$ *alors* $R_1 = R_2$.

Soit $\mathbf{P} \subset \mathbf{M}$ un plan dans $\mathbf{M}$ et $(u\,,v)$ une base orthonormée dans $\mathbf{P}$. Nous définissons $\mathbf{K}(\mathbf{P}) = R(u\,,v\,,u\,,v)$ et on sait qu'elle ne dépende pas de base [3]. Si $(u\,,v)$ n'est pas orthonormée, alors

$$\mathbf{K}(\mathbf{P}) = \frac{R(u\,,v\,,u\,,v)}{g(u\,,u)\cdot g(v\,,v) - [g(u\,,v)]^2}\,.$$

Nous désignons $R_1(v_1\,,v_2\,,v_3\,,v_4) = g(v_1\,,v_3)\cdot g(v_2\,,v_4) - g(v_1\,,v_4)\cdot g(v_2\,,v_3)$ et la démonstration de la proposition qui suit utilise Proposition 2.3.

PROPOSITION 2.4. *Soit* R *une application 4-linéaire sur l'espace de Hilbert* **M** *à valeurs réelles qui vérifie* I), II) *et* III). *Si* $\mathbf{K}(\mathbf{P}) = c$ *pour tout plan* $\mathbf{P} \subset \mathbf{M}$, *alors* $\mathrm{R} = c\mathrm{R}_1$.

Soit maintenant $\pi: \mathrm{M} \to \mathrm{B}$ un h-fibré riemannien. Ces considérations algébriques restent valables pour chaque fibré local M_x de M. Pour chaque 2-plan $\mathbf{P} \subset \mathrm{M}_x$ nous considérons le nombre

$$\mathbf{K}(\mathbf{P}\,;x) = \frac{\mathrm{R}(x\,;v_1, v_2, v_1, v_2)}{g(x\,;v_1, v_1)\cdot g(x\,;v_2, v_2) - [g(x\,;v_1, v_2)]^2}$$

où (v_1, v_2) est une base dans **P**. $\mathbf{K}(\mathbf{P}\,;x)$ s'appelle la courbure sectionnelle dans la direction plane **P** et dans le point x. Si **K** est indépendante de **P** et x, alors M s'appelle à courbure constante.

Il est ici nécessaire de définir la dérivée covariante pour autres applications différents de celles qui sont dans Définition 1.2. Soit **F** un espace de Banach et ∇ une h-connexion sur M.

DÉFINITION 2.2. *La h-dérivée covariante pour la* C^1*-application* $f: \varphi(\mathrm{U}) \to \mathrm{L}_p(\mathbf{M}\,;\mathbf{F})$ *par rapport à la h-connexion* ∇, *en direction* $u \in \mathbf{M}$ *est l'application* $\nabla_u f: \varphi(\mathrm{U}) \to \mathrm{L}_p(\mathbf{M}\,;\mathbf{F})$ *telle que*

$$(2.10) \qquad (\nabla_u f)(x\,;u_1, \cdots, u_p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x\,;u_1, \cdots, u_p)(hu) - \\ - \sum_{i=1}^{p} f(x\,;u_1, \cdots, \Gamma(x\,;u, u_i), \cdots, u_p).$$

Nous supposons qu'il existe l'application bilinéaire continue $\mathbf{Q}: \mathbf{F} \times \mathbf{F} \to \mathbf{F}$. Pour tout $f: \varphi(\mathrm{U}) \to \mathrm{L}_p(\mathbf{M}\,;\mathbf{F})$ et $g: \varphi(\mathrm{U}) \to \mathrm{L}_q(\mathbf{M}\,;\mathbf{F})$ nous définissons $\mathbf{Q}(f, g): \varphi(\mathrm{U}) \to \mathrm{L}_{p+q}(\mathbf{M}\,;\mathbf{F})$

$$\mathbf{Q}(f, g)(x\,;u_1, \cdots, u_{p+q}) = \mathbf{Q}(f(x\,;u_1, \cdots, u_p), g(x\,;u_{p+1}, \cdots, u_{p+q})).$$

Si $l: \varphi(\mathrm{U}) \to \mathrm{R}$ est de classe C^1, alors il est aisé de monter les relations:

$$(2.11) \qquad (\nabla_u(l\cdot f))(x\,;u_1, \cdots, u_p) = (\mathrm{D}_x l)(hu)\cdot f(x\,;u_1, \cdots, u_p) + \\ + l(x)\cdot(\nabla_u f)(x\,;u_1, \cdots, u_p),$$

$$(2.12) \qquad (\nabla_u(\mathbf{Q}(f, g)))(x\,;u_1, \cdots, u_{p+q}) = \\ = \mathbf{Q}((\nabla_u f)(x\,;u_1, \cdots, u_p), g(x\,;u_{p+1}, \cdots, u_{p+q})) + \\ + \mathbf{Q}(f(x\,;u_1, \cdots, u_p), (\nabla_u g)(x\,;u_{p+1}, \cdots, u_{p+q})).$$

THÉORÈME 2.2 (*généralisation du théorème de Schur*). *Soient* $\pi: \mathrm{M} \to \mathrm{B}$ *un h-fibré riemannien ayant dim* $\mathbf{M} \geqq 3$, $h_{\varphi(x)}$ *surjective pour toute* $(\Phi, \varphi, \mathrm{U})$ *et* B *connex. Si la courbure sectionnelle* $\mathbf{K}(\mathbf{P}\,;x)$ *est indépendante de la direction plane* **P** *alors* M *a courbure constante.*

Démonstration. Nous définissons $\mathrm{R}_1: \varphi(\mathrm{U}) \to \mathrm{L}_p(\mathbf{M}\,;\mathrm{R})$ avec

$$\mathrm{R}_1(x\,;u_1, u_2, u_3, u_4) = g(x\,;u_1, u_3)\cdot g(x\,;u_2, u_4) - \\ - g(x\,;u_1, u_4)\cdot g(x\,;u_2, u_3).$$

En tenant compte de la proposition 2.4 on a

$$\mathrm{R}(x\,;u_1\,,u_2\,,u_3\,,u_4) = \mathbf{K}(x)\cdot\mathrm{R}_1(x\,;u_1\,,u_2\,,u_3\,,u_4)\,.$$

Pour la dérivée covariante de R_1 nous utilisons (2.12) et obtenons

$$\begin{gathered}(\nabla_u \mathrm{R}_1)(x\,;u_1\,,u_2\,,u_3\,,u_4) = (\nabla_u g)(x\,;u_1\,,u_3)\cdot g(x\,;u_2\,,u_4) + \\ + g(x\,;u_1\,,u_3)\cdot(\nabla_u g)(x\,;u_2\,,u_4) - (\nabla_u g)(x\,;u_1\,,u_4)\cdot g(x\,;u_2\,,u_3) - \\ - g(x\,;u_1\,,u_4)\cdot(\nabla_u g)(x\,;u_2\,,u_3)\,.\end{gathered}$$

Mais ∇ est une h–connexion riemannienne, c'est–à–dire $\nabla_u g = 0$ et donc $\nabla_u \mathrm{R}_1 = 0$. En utilisant (2.11) on a

$$(\nabla_u \mathrm{R})(x\,;u_1\,,u_2\,,u_3\,,u_4) = \mathbf{K}'(x)(hu)\cdot\mathrm{R}_1(x\,;u_1\,,u_2\,,u_3\,,u_4)\,. \tag{2.13}$$

Par des calculs directs, compte tenu de (2.10) il résulte

$$(\nabla_u \mathrm{R})(x\,;u_1\,,u_2\,,u_3\,,u_4) = g(x\,;(\nabla_u \mathrm{R})(x\,;u_3\,,u_4\,,u_2)\,,u_1)\,.$$

Compte tenu de cette dernière relation dans (2.13) on a

$$(\nabla_u \mathrm{R})(x\,;u_1\,,u_2\,,u_3\,,u_4) = \mathbf{K}'(x)(hu)(g(x\,;u_2\,,u_4)\cdot u_3 - g(x\,;u_2\,,u_3)\cdot u_4)\,.$$

Nous utilisons l'identité de Bianchi (1.10) et obtenons

$$\begin{gathered}\mathbf{K}'(x)(hu)(g(x\,;u_2\,,u_4)\cdot u_3 - g(x\,;u_2\,,u_3)\cdot u_4) + \\ + \mathbf{K}'(x)(hu_3)(g(x\,;u_2\,,u)\cdot u_4 - g(x\,;u_2\,,u_4)\cdot u) + \\ + \mathbf{K}'(x)(hu_4)(g(x\,;u_2\,,u_3)\cdot u - g(x\,;u_2\,,u)\cdot u_3)\,.\end{gathered}$$

Pour u_3 fixé nous prenons $u_4\,,u_2\,,u$ de sorte que $u_2 = u\,,u_3\,,u_4\,,u_2$ sont orthogonaux deux à deux et $g(x\,;u_2\,,u_2) = 1$. On a

$$\mathbf{K}'(x)(hu_3)\cdot u_4 - \mathbf{K}'(x)(hu_4)\cdot u_3 = 0\,.$$

Mais u_3 et u_4 sont linéaires indépendants et donc $\mathbf{K}'(x)(hu_3) = 0$. Vu que $h_{\varphi(x)}$ est surjective, nous obtenons $\mathbf{K}'(x) = 0$, c'est–à–dire $\mathbf{K}$ est localement constante. Mais B est connexe et donc $\mathbf{K}$ est constante sur B, *q.e.d.*

Remarque. Si en particulier $\mathrm{M} = \mathrm{TB}$ et $h = 1_{\mathrm{TB}}$, alors nous obtenons des résultats connus pour les connexions linéaires sur une variété banachique [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI N., *Variétés différentielles et analytiques*. Fascicule de résultats (paragraphes 1 à 7), Hermann, Paris 1967.

[2] FLASCHEL P. et KLINGENBERG W., *Riemannsche Hilbert–mannigfaltigkeiten. Periodische Geodatische*, Lecture Notes in «Mathematics», *282*, Springer, 1972.

[3] GHEORGHIEV GH. et OPROIU V., *Geometrie diferențială*, II, Iași, 1971.

[4] LANG S., *Introduction aux variétés différentiables*, Dunod, Paris, 1967.