Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Carlo Venini

Sul campo gravitazionale di una particella nucleare carica in Relatività generale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.2, p. 232–239.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_2_232_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Meccanica. — *Sul campo gravitazionale di una particella nucleare carica in Relatività generale* (*). Nota di CARLO VENINI, presentata (**) dal Socio B. FINZI.

SUMMARY. — A strict solution is obtained for the field equations of general Relativity, by assuming that the field must be generated by a nuclear particle. This solution has a spherical symmetry and none of the variables depends on the time.

È ben noto che esistono soluzioni rigorose delle equazioni di campo della teoria della Relatività generale, nell'ipotesi che il campo stesso venga generato da una particella materiale priva di carica elettrica, sia stazionario e possegga simmetria sferica [1].

Il problema è stato successivamente esteso e risolto per un corpuscolo materiale elettrizzato, quale può essere un elettrone, che crea un campo elettromagnetico maxwelliano [2].

Nella presente ricerca stabilisco dapprima l'espressione del tensore di energia elettromagnetica per un generico campo di Yukawa [3], caratterizzato notoriamente dal fatto che la divergenza del tensore elettromagnetico, ancora irrotazionale, non eguaglia, a differenza di quanto accade in un campo maxwelliano, il vettore distribuzione elettrica, ma eguaglia la somma di questo vettore e di un secondo vettore proporzionale al vettore potenziale.

Successivamente trovo una soluzione delle equazioni di campo della Relatività generale per un particolare campo di Yukawa; precisamente per quello generato da una particella nucleare, nell'ipotesi di stazionarietà e di simmetria sferica. Pervengo a tale soluzione mediante una integrazione per serie, ritenendo che il potenziale elettrostatico presenti, nella posizione occupata dalla particella stessa, una singolarità polare del primo ordine, come nella classica teoria dei campi nucleari [4], e il tensore fondamentale una singolarità del secondo ordine, analogamente a quanto accade per un'ordinaria particella fornita di carica elettrica [2].

1. LE EQUAZIONI DI CAMPO

In un sistema di riferimento dello spazio–tempo riemanniano della Relatività generale, supponiamo che il campo generato da una particella nucleare, trattata come una singolarità del campo stesso e fornita di massa intrinseca m

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca per la Fisica Matematica del C.N.R..

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1973.

e carica q, sia elettrostatico e possegga simmetria sferica. La metrica può allora assumere la seguente forma differenziale quadratica:

$$ds^2 = e^{\sigma(r)}\, c^2\, dt^2 - e^{\lambda(r)}\, dr^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2 , \tag{1}$$

dove la costante c rappresenta la velocità della luce nel vuoto rispetto ad ogni osservatore inerziale e t il tempo. Inoltre, fissata una corrispondenza biunivoca tra i punti dello spazio geometrico V_3 e quelli di uno spazio euclideo S_3 , r , θ , φ sono le coordinate di V_3 corrispondenti a un sistema di coordinate polari in S_3: la prima risulta funzione del solo raggio vettore, le rimanenti due coincidono rispettivamente con la latitudine e con la longitudine. Nella (1), infine, σ e λ, per l'ipotesi di simmetria sferica, sono funzioni della sola r, da determinarsi mediante l'integrazione delle equazioni di campo.

Detta $g_{\alpha\beta}$ la generica componente covariante del tensore fondamentale, posto $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, nel sistema di riferimento (1) si ha:

$$g_{00} = e^{\sigma} \; ; \; g_{11} = -e^{\lambda} \; ; \; g_{22} = -r^2 \; ; \; g_{33} = -r^2 \operatorname{sen}^2\theta \; ; \; g_{\lambda\sigma} = 0 \quad (\lambda \neq \sigma), \tag{2}$$

da cui, per le componenti controvarianti:

$$g^{00} = e^{-\sigma} \; ; \; g^{11} = -e^{-\lambda} \; ; \; g^{22} = -r^{-2} \; ; \; g^{33} = -r^{-2} \operatorname{sen}^{-2}\theta \; ; \; g^{\lambda\sigma} = 0 \quad (\lambda \neq \sigma) . \tag{3}$$

Qui, come in seguito, gli indici greci assumono i valori 0, 1, 2, 3, quelli latini i soli valori 1, 2, 3. Trattando la particella nucleare come una singolarità, le equazioni di campo, valide esternamente ad essa, sono le seguenti:

$$A_{\alpha\beta} + \chi E_{\alpha\beta} = 0 . \tag{4}$$

Nelle (4) $E_{\alpha\beta}$ rappresenta il tensore di energia elettromagnetica,

$$A_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \tag{5}$$

il tensore gravitazionale, ed è inoltre:

$$\chi = \frac{8\pi k}{c^4} \tag{6}$$

essendo k la classica costante di attrazione universale. Nella (5), infine, $R_{\alpha\beta}$ costituisce il tensore simmetrico di Riemann contratto e

$$R = R_{\lambda\sigma} g^{\lambda\sigma} \tag{7}$$

il suo invariante lineare.

2. DETERMINAZIONE DEL TENSORE GRAVITAZIONALE

Si ha notoriamente:

$$R_{\alpha\beta} = -\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\}_{,\lambda} + \left\{ {\lambda \atop \alpha\lambda} \right\}_{,\beta} - \left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\} \left\{ {\sigma \atop \lambda\sigma} \right\} + \left\{ {\sigma \atop \alpha\lambda} \right\} \left\{ {\lambda \atop \sigma\beta} \right\} . \tag{8}$$

Nella (8), come in seguito, la virgola è simbolo di derivazione parziale e

$$\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\} = \frac{1}{2}\, g^{\lambda\sigma} \left(g_{\alpha\sigma,\beta} + g_{\sigma\beta,\alpha} - g_{\beta\alpha,\sigma} \right) \tag{9}$$

rappresenta il generico simbolo di Christoffel di seconda specie.

Dalla (8), per le (9), (2) e (3), si deduce, dopo qualche calcolo:

$$\left\{ \begin{aligned} & R_{00} = e^{\sigma-\lambda} \left(-\frac{1}{2}\ddot{\sigma} + \frac{1}{4}\dot{\sigma}\dot{\lambda} - \frac{1}{4}\dot{\sigma}^2 - \frac{\dot{\sigma}}{r} \right) ; \\ & R_{11} = \frac{1}{2}\ddot{\sigma} - \frac{1}{4}\dot{\sigma}\dot{\lambda} + \frac{1}{4}\dot{\sigma}^2 - \frac{\dot{\lambda}}{r} \ ; \qquad R_{22} = e^{-\lambda} \left[1 + \frac{1}{2} r (\dot{\sigma} - \dot{\lambda}) \right] - 1 \ ; \\ & R_{33} = e^{-\lambda} \left[1 + \frac{1}{2} r (\dot{\sigma} - \dot{\lambda}) \right] \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \ ; \qquad R_{\lambda\sigma} = 0 \qquad (\lambda \neq \sigma) , \end{aligned} \right. \tag{10}$$

dove il punto sovrapposto indica la derivazione ordinaria, rispetto all'unica variabile dalla quale la grandezza dipende. Dalla (5), per le (10), (7), (2) e (3), si trae:

$$\left\{ \begin{aligned} & A_{00} = e^{\sigma-\lambda} \left(-\frac{\dot{\lambda}}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} e^{\sigma} \ ; \qquad A_{11} = -\frac{\dot{\sigma}}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} e^{\lambda} \ ; \\ & A_{22} = \frac{1}{2} r e^{-\lambda} (\dot{\lambda} - \dot{\sigma}) - \frac{1}{2} r^2 e^{-\lambda} \ddot{\sigma} + \frac{1}{4} r^2 e^{-\lambda} \dot{\sigma}\dot{\lambda} - \frac{1}{4} r^2 e^{-\lambda} \dot{\sigma}^2 ; \\ & A_{33} = \left[\frac{1}{2} r e^{-\lambda} (\dot{\lambda} - \dot{\sigma}) - \frac{1}{2} r^2 e^{-\lambda} \ddot{\sigma} + \frac{1}{4} r^2 e^{-\lambda} \dot{\sigma}\dot{\lambda} - \frac{1}{4} r^2 e^{-\lambda} \dot{\sigma}^2 \right] \operatorname{sen}^2\theta ; \\ & A_{\lambda\sigma} = 0 \qquad (\lambda \neq \sigma) . \end{aligned} \right. \tag{11}$$

3. Equazioni elettromagnetiche e determinazione del tensore di energia elettromagnetica

Introduciamo il tensore elettromagnetico $F_{\alpha\beta}$, che, anche in un campo di Yukawa, è emisimmetrico e irrotazionale, ossia deve soddisfare alle equazioni:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}\, F_{\gamma\lambda/\beta} = 0 . \tag{12}$$

Nelle (12) la barra è simbolo di derivazione tensoriale e $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}$ rappresenta il tensore di Ricci, notoriamente emisimmetrico rispetto ad ogni coppia di indici. La più generale soluzione delle (12) è fornita da:

$$F_{\alpha\beta} = V_{\beta/\alpha} - V_{\alpha/\beta} = V_{\beta,\alpha} - V_{\alpha,\beta} , \tag{13}$$

dove V_α è un vettore dello spazio-tempo, che si identifica con il vettore potenziale. Trattandosi di un campo elettrostatico, risulta, nel riferimento (1):

$$V_1 = V_2 = V_3 = 0 \quad [5] , \tag{14}$$

e quindi, per le (3):

$$V^1 = V^2 = V^3 = 0 . \tag{15}$$

L'unica componente covariante non nulla del precedente vettore è quindi quella temporale V_0, la quale, per le ipotesi fatte, sarà ritenuta funzione della sola coordinata raggio r; lo stesso accade allora, sempre per le (3), per la componente temporale controvariante. Dalle (13) si deduce:

$$F_{10} = -F_{01} = \dot{V}_0 , \tag{16}$$

mentre le altre componenti del tensore elettromagnetico risultano nulle.

In un generico campo di Yukawa il tensore elettromagnetico deve inoltre soddisfare alle equazioni:

$$F^{\alpha\beta}_{/\beta} = J^\alpha + \xi^2 V^\alpha , \tag{17}$$

dove J^α rappresenta il vettore distribuzione elettrica e ξ una costante, la quale, come si constata facilmente, possiede le dimensioni del reciproco di una lunghezza. Nel caso di un campo nucleare, se si assume $\xi = \frac{2\pi Mc}{h}$, con h costante di Planck e $M \simeq 0{,}3 \cdot 10^{-24}$ gr massa intrinseca del pione, $1/\xi$ si identifica con il raggio di azione delle classiche forze nucleari [6] e risulta $1/\xi \simeq 10^{-13}$ cm.

In assenza della costante ξ, le (17) si riducono alle ben note equazioni valide in un ordinario campo elettromagnetico.

Consideriamo ora il vettore forza specifica

$$H_\alpha = F_{\alpha\beta} J^\beta , \tag{18}$$

ottenuto componendo il tensore elettromagnetico con il vettore distribuzione elettrica.

Come in un campo maxwelliano, imponiamo alla divergenza del tensore di energia elettromagnetica $E_{\alpha\beta}$ di uguagliare H_α. Imponendo inoltre la condizione di solenoidalità di Lorentz, ossia ritenendo:

$$V^\beta_{/\beta} = 0 , \tag{19}$$

una particolare soluzione delle equazioni

$$E^{/\beta}_{\alpha\beta} = H_\alpha \tag{20}$$

è fornita, per le (12), (17), (18) e (19), da:

$$E_{\alpha\beta} = g^{\gamma\lambda} F_{\alpha\gamma} F_{\lambda\beta} + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\gamma\lambda} F^{\gamma\lambda} + \xi^2 \left(V_\alpha V_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} V_\lambda V^\lambda \right) . \tag{21}$$

La differenza fra l'integrale generale delle equazioni lineari (20) e il loro integrale particolare (21) è rappresentata dal tensore, privo di interesse, $\varepsilon_{\alpha\lambda\sigma\rho}\, \varepsilon_{\beta\gamma\eta\delta}\, B^{\lambda\sigma\gamma\eta/\rho\delta}$, con $B^{\lambda\sigma\gamma\eta}$ tensore quadruplo a priori arbitrario che, senza pregiudizio della generalità, riterremo nullo. La (19), per le (2), (3), (14) e (15), è soddisfatta.

Nel riferimento (1), corrispondente al campo generato da una particella nucleare, dalla (21) si trae allora, grazie alle (2), (3), (13), (14) e (16):

$$
(22) \quad \begin{cases} E_{00} = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \dot{V}_0^2 + \frac{1}{2} \xi^2 V_0^2 \, ; \quad E_{11} = -\frac{1}{2} e^{-\sigma} \dot{V}_0^2 + \frac{1}{2} \xi^2 e^{\lambda-\sigma} V_0^2 \, ; \\ E_{22} = \frac{1}{2} r^2 e^{-(\lambda+\sigma)} \dot{V}_0^2 + \frac{1}{2} \xi^2 r^2 e^{-\sigma} V_0^2 \, ; \\ E_{33} = \left[\frac{1}{2} r^2 e^{-(\lambda+\sigma)} \dot{V}_0^2 + \frac{1}{2} \xi^2 r^2 e^{-\sigma} V_0^2\right] \operatorname{sen}^2 \theta \, ; \quad E_{\lambda\sigma} = 0 \qquad (\lambda \neq \sigma). \end{cases}
$$

4. Integrazione delle equazioni elettromagnetiche e di quelle di campo

Per le (11) e le (22), le sei equazioni di campo (4) corrispondenti ad indici differenti si riducono ad identità, mentre le quattro corrispondenti ad indici eguali assumono la forma:

$$
(23) \qquad e^{\sigma-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\dot{\lambda}}{r}\right) - \frac{1}{r^2} e^{\sigma} + \frac{\chi}{2} e^{-\lambda} \dot{V}_0^2 + \frac{\chi}{2} \xi^2 V_0^2 = 0 \, ;
$$

$$
(24) \qquad -\frac{\dot{\sigma}}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} e^{\lambda} - \frac{\chi}{2} e^{-\sigma} \dot{V}_0^2 + \frac{\chi}{2} \xi^2 e^{\lambda-\sigma} V_0^2 = 0 \, ;
$$

$$
(25) \qquad \frac{1}{2} r e^{-\lambda} (\dot{\lambda} - \dot{\sigma}) - \frac{1}{2} r^2 e^{-\lambda} \ddot{\sigma} + \frac{1}{4} r^2 e^{-\lambda} \dot{\sigma} \dot{\lambda} - \frac{1}{4} r^2 e^{-\lambda} \dot{\sigma}^2 + \\ + \frac{\chi}{2} r^2 e^{-(\lambda+\sigma)} \dot{V}_0^2 + \frac{\chi}{2} \xi^2 r^2 e^{-\sigma} V_0^2 = 0 \, ;
$$

$$
(26) \qquad \left[\frac{1}{2} r e^{-\lambda} (\dot{\lambda} - \dot{\sigma}) - \frac{1}{2} r^2 e^{-\lambda} \ddot{\sigma} + \frac{1}{4} r^2 e^{-\lambda} \dot{\sigma} \dot{\lambda} - \frac{1}{4} r^2 e^{-\lambda} \dot{\sigma}^2 + \right. \\ \left. + \frac{\chi}{2} r^2 e^{-(\lambda+\sigma)} \dot{V}_0^2 + \frac{\chi}{2} \xi^2 r^2 e^{-\sigma} V_0^2\right] \operatorname{sen}^2 \theta = 0 \, .
$$

Trattandosi di un campo generato da un corpuscolo considerato come una singolarità, risulta $J^{\alpha} = 0$. A causa delle (2), (3), (14), (15), (13) e (16), ponendo in (17) $\alpha = 0$ si perviene all'equazione:

$$
(27) \qquad e^{-\lambda} \ddot{V}_0 - \frac{1}{2} e^{-\lambda} (\dot{\lambda} + \dot{\sigma}) \dot{V}_0 + \frac{2}{r} e^{-\lambda} \dot{V}_0 - \xi^2 V_0 = 0 \, ,
$$

mentre per $\alpha = 1, 2, 3$ si ottengono tre identità.

Osserviamo innanzitutto che la (26) è identica alla (25). Moltiplicando ambo i membri della (23) per $e^{\lambda-\sigma}$ e sommando membro a membro con la (24) si trae:

$$
(28) \qquad \dot{\sigma} = -\dot{\lambda} + \chi \xi^2 r e^{\lambda-\sigma} V_0^2 \, .
$$

Sostituiamo la (23) con la (28). Come si constata dopo qualche calcolo, la (25) risulta conseguenza delle (24), (27) e (28): si può pervenire precisamente alla (25) derivando la (24) e tenendo conto successivamente della (27) e della (28). È quindi lecito considerare le sole tre equazioni differenziali alle derivate ordinarie (24), (27) e (28), nelle tre funzioni incognite λ, σ, V_0.

Conviene sostituire a λ e σ nuove funzioni γ e η, legate alle precedenti dalle relazioni seguenti:

$$\gamma = e^{\sigma} \quad ; \quad \eta = e^{-\lambda} . \tag{29}$$

Per le (29), le equazioni (24), (27) e (28) assumono la forma:

$$\dot{\gamma}\eta - \dot{\eta}\gamma - \chi\xi^2 r V_0^2 = 0 ; \tag{30}$$

$$r\dot{\gamma}\eta + \gamma\eta - \gamma + \frac{\chi}{2} r^2 \eta \dot{V}_0^2 - \frac{\chi}{2} \xi^2 r^2 V_0^2 = 0 ; \tag{31}$$

$$r\gamma\eta\ddot{V}_0 - \frac{1}{2} r(\dot{\gamma}\eta - \dot{\eta}\gamma)\dot{V}_0 + 2\gamma\eta\dot{V}_0 - \xi^2 r\gamma V_0 = 0 . \tag{32}$$

Osserviamo che, a causa delle (29) e delle (2), γ si identifica con g_{00} ed η con $-\frac{1}{g_{11}}$. Cerchiamo di integrare per serie il sistema composto dalle (30), (31) e (32), supponendo che, come avviene per un campo maxwelliano, γ e η presentino per $r = 0$ una singolarità polare del secondo ordine e V_0, come nella classica teoria dei campi nucleari, una singolarità del primo ordine. Poniamo allora:

$$\gamma = \frac{f}{r^2} \quad ; \quad \eta = \frac{F}{r^2} \quad ; \quad V_0 = \frac{K}{r} , \tag{33}$$

e riteniamo f, F, K sviluppabili nelle seguenti serie di potenze intere non negative di r:

$$f = \sum_0^{\infty}{}_s\, a_s r^s \quad ; \quad F = \sum_0^{\infty}{}_s\, b_s r^s \quad ; \quad K = \sum_0^{\infty}{}_s\, c_s r^s , \tag{34}$$

con

$$a_0 \neq 0 \quad ; \quad b_0 \neq 0 \quad ; \quad c_0 \neq 0 . \tag{35}$$

A causa delle (33), le (30), (31) e (32) divengono:

$$\dot{f}F - \dot{F}f - \chi\xi^2 r^3 K^2 = 0 ; \tag{36}$$

$$Ff - F\dot{f}r + r^2 f - \frac{\chi}{2} F(r^2\dot{K}^2 - 2r\dot{K}K + K^2) + \frac{\chi}{2}\xi^2 r^4 K^2 = 0 ; \tag{37}$$

$$rfF\ddot{K} + \frac{1}{2}(\dot{f}F - \dot{F}f)(K - \dot{K}r) - \xi^2 r^3 fK = 0 . \tag{38}$$

Sostituendo le (34) nelle (36), (37) e (38) ed annullando il coefficiente della generica potenza essesima di r, si deducono le seguenti relazioni di tipo ricorrente:

$$(m+1)\, a_{m+1}\, b_{s-m} - (m+1)\, b_{m+1}\, a_{s-m} - \chi\xi^2\, c_m\, c_{s-m-3} = 0\,; \tag{39}$$

$$(1-s+m)\, a_{s-m}\, b_m + a_{s-2} - \frac{\chi}{2}\left[(m+1)(l+1)\, c_{m+1}\, c_{l+1}\, b_{s-m-l-2} - \right.$$
$$\left. - 2(l+1)\, c_m\, c_{l+1}\, b_{s-m-l-1} + c_m\, c_l\, b_{s-m-l}\right] + \frac{\chi\xi^2}{2}\, c_m\, c_{s-m-4} = 0\,; \tag{40}$$

$$(s-l-m+1)(s-l-m)\, a_l\, b_m\, c_{s-l-m+1} - \frac{1}{2}(m+1)(s-l-m)\cdot$$
$$\cdot (b_l\, a_{m+1} - a_l\, b_{m+1})\, c_{s-l-m} + \frac{1}{2}(m+1)(b_l\, a_{m+1} - a_l\, b_{m+1})\, c_{s-l-m} -$$
$$- \xi^2\, a_m\, c_{s-m-3} = 0 \qquad (s = 0\,, 1\,, 2\,, \cdots). \tag{41}$$

Nelle (39), (40) e (41) è sottintesa la sommatoria da 0 ad s rispetto ad l e m, risultando ovviamente nulli quei coefficienti il cui indice viene ad assumere un valore negativo.

Per $s = 0$, la (39) e la (40), tenendo conto della seconda delle (35), assumono rispettivamente la forma:

$$a_1\, b_0 - a_0\, b_1 = 0 \quad ; \quad a_0 - \frac{\chi}{2}\, c_0^2 = 0\,, \tag{42}$$

mentre la (41), per la terza delle (35), si riduce alla prima delle (42).

Per $s = 1$, la (39) dà luogo all'equazione:

$$a_2\, b_0 - a_0\, b_2 = 0\,, \tag{43}$$

la (40), per la seconda delle (42), risulta identicamente soddisfatta, mentre la (41), a causa della prima delle (42), della (43) e della prima e seconda delle (35), implica:

$$c_2 = 0\,. \tag{44}$$

Per $s = 2$, la (40), per la (43), la (44), la seconda delle (42) e la prima delle (35), comporta:

$$b_2 = 1\,. \tag{45}$$

Assegnati ad arbitrio, ad esempio, $c_0\,, b_0\,, a_1\,, c_1$, dalle due relazioni (42) e dalla (43) si ricavano $a_0\,, b_1\,, a_2$, essendo b_2 fornito dalla (45).

Si constata facilmente che per la determinazione dei generici termini $a_p\,, b_p\,, c_p$, con $p \geq 3$, occorre fare uso della (40), ponendo in essa $s = p$ e delle (39) e (41), ponendo $s = p - 1$. Si ottiene in tal modo un sistema lineare non omogeneo di tre equazioni in cui figurano come incognite i tre menzionati termini; si può dimostrare, dopo qualche calcolo, che il determinante dei coefficienti delle incognite è diverso da zero.

In definitiva nelle (39), (40) e (41), intervengono quattro costanti a priori arbitrarie, conformemente al fatto che la (36) e la (37) sono equazioni differenziali del primo ordine, mentre la (38) è del secondo ordine.

Se si identifica c_0 con la carica q della particella nucleare, dalla seconda delle (42) si deduce, a causa della (6):

$$a_0 = \frac{4\pi k q^2}{c^4} .$$

Nulla vieta di ritenere, come nel caso di un campo generato da un ordinario corpuscolo elettrizzato,

$$b_0 = a_0 . \tag{46}$$

Dalla prima delle (42) si trae allora $a_1 = b_1$. Assumiamo, come per una semplice carica:

$$a_1 = b_1 = -\frac{2\,km}{c^2} .$$

La (43), per la (46) e la (45), comporta:

$$a_2 = 1 .$$

Per quanto riguarda, infine, la costante c_1, che interviene nello sviluppo in serie di K, ossia, per la terza delle (34), nell'espressione del potenziale elettrostatico, è lecito ritenere:

$$c_1 = -q\xi ,$$

come avviene per il classico potenziale elettrostatico $q/r\, e^{-\xi r}$ del campo generato da una particella nucleare.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] Cfr. B. FINZI, *Cinquanta anni di Relatività*, Firenze 1955, p. 235.
[2] Cfr. P. G. BERGMANN, *Introduction to the Theory of Relativity*, 1958, p. 204.
[3] H. YUKAWA, *On the interaction of elementary particles*, « Proc. Phys. Mat. Soc. Japan », *20*, p. 319 (1938).
[4] Cfr. E. SEGRÈ, *Nuclei e particelle*, Bologna 1965, p. 602.
[5] Cfr. A. S. EDDINGTON, *The mathematical Theory of Relativity*, Cambridge 1954, p. 185.
[6] Cfr. [4], p. 603.