Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Vincenzo Ancona

Fasci debolmente positivi su di uno spazio complesso

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.4, p. 567–569.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_4_567_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Geometria. — *Fasci debolmente positivi su di uno spazio complesso* (*).
Nota di VINCENZO ANCONA, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Let $\mathfrak{F}$ be a coherent sheaf over a compact reduced complex space X, $L(\mathfrak{F})$ the linear fiber space associated with $\mathfrak{F}$, $S^k(\mathfrak{F})$ the k-th symmetric power of $\mathfrak{F}$. We show that if the zero-section of $L(\mathfrak{F})$ is exceptional, then $H^r(X, \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} S^k(\mathfrak{F})) = 0$ for every coherent sheaf $\mathcal{E}$ on X and for $r \geq 1$ and sufficiently large k. Using this result, we deduce that, if moreover Supp $\mathfrak{F} = X$, then X is a Moišezon space.

INTRODUZIONE

In questa Nota si espongono, senza entrare in particolari dimostrativi, i principali risultati di un Lavoro dell'Autore di prossima pubblicazione.

Dato un fascio analitico coerente su uno spazio complesso compatto, si dice ch'esso è *debolmente positivo* se lo spazio lineare associato è debolmente negativo nel senso di Grauert [4]. Si dà allora un teorema di annullamento di coomologia per fasci debolmente positivi (Teorema 1), e si generalizza un teorema d'immersione di Kodaira [6] e Grauert [4] (Teorema 3). Si dà inoltre la nozione di fascio positivo su uno spazio complesso e si generalizzano alcuni risultati di [2].

§ 1. FASCI DEBOLMENTE POSITIVI E POSITIVI

Dato un fascio analitico coerente $\mathfrak{F}$ sopra uno spazio complesso X indichiamo con $S(\mathfrak{F})$ l'algebra simmetrica di $\mathfrak{F}$. Si ha $S(\mathfrak{F}) = \bigoplus_{k \geq 0} S^k(\mathfrak{F})$, ove $S^k(\mathfrak{F})$ è la k-esima potenza tensoriale simmetrica di $\mathfrak{F}$; $S^k(\mathfrak{F})$ è un fascio analitico coerente su X. Indichiamo inoltre con $Y = L(\mathfrak{F})$ lo spazio fibrato lineare associato a $\mathfrak{F}$ (cfr. [3]).

Sia $\mathcal{E}$ un altro fascio analitico coerente su X. Posto $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$, con procedimento analogo a quello utilizzato in [1] si ottiene per ogni intero $r \geq 0$ una filtrazione $\{H^r(Y, \hat{\mathcal{E}})_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ del gruppo di coomologia $H^r(Y, \hat{\mathcal{E}})$ tale che il gruppo graduato associato sia isomorfo a $\bigoplus_{k \geq 0} H^r(X, \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} S^k(\mathfrak{F}))$; inoltre si ottiene un'iniezione:

$$\bigoplus_{k \geq 0} H^r(X, \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} S^k(\mathfrak{F})) \rightarrow H^r(Y, \hat{\mathcal{E}}) . \tag{1}$$

Supponiamo ora X compatto. Diremo che $\mathfrak{F}$ è *debolmente positivo* se $L(\mathfrak{F})$ è debolmente negativo nel senso di Grauert [4], cioè se la sezione nulla di $L(\mathfrak{F})$ possiede un intorno relativamente compatto fortemente pseu-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca del C.N.R. per le strutture algebriche e geometriche e loro applicazioni.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1973.

doconvesso. Sia T un tale intorno. Componendo l'applicazione (1) con l'applicazione di restrizione $H^r(Y, \hat{\mathcal{E}}) \to H^r(T, \hat{\mathcal{E}})$ si ottiene un'applicazione

$$\bigoplus_{k \geq 0} H^r(X, \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} S^k(\mathcal{F})) \to H^r(T, \hat{\mathcal{E}})$$

che si dimostra essere iniettiva. Tenuto conto che $\dim_{\mathbf{C}} H^r(T, \hat{\mathcal{E}}) < +\infty$ per $r \geq 1$ (poiché T è fortemente pseudoconvesso), se ne deduce subito (cfr. [4], Hilfssatz 1):

TEOREMA 1. *Sia* X *uno spazio complesso compatto,* $\mathcal{F}$ *un fascio debolmente positivo su* X. *Per ogni fascio analitico coerente* $\mathcal{E}$ *su* X *esiste un intero positivo* $k_0 = k_0(\mathcal{E})$ *tale che*

$$H^r(X, \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} S^k(\mathcal{F})) = 0 \qquad \text{per} \quad r \geq 1 \quad \text{e} \quad k \geq k_0 .$$

Sia ancora $\mathcal{F}$ un fascio coerente su uno spazio complesso X. Supponiamo che su ogni fibra $Y_x = L(\mathcal{F})_x$ di $Y = L(\mathcal{F})$ sia data una forma hermitiana definita positiva h_x. Diremo che la collezione $\{h_x\}_{x \in X}$ è una forma hermitiana su $L(\mathcal{F})$ se, per ogni $x \in X$, esistono un intorno U di x in X, un'immersione chiusa di $L(\mathcal{F})|_U$ in $U \times \mathbf{C}^p$ e una forma hermitiana definita positiva su $U \times \mathbf{C}^p$:

$$\hat{h} = \sum_{i,j} \hat{h}_{ij} z_i \bar{z}_j$$

data da funzioni $\hat{h}_{ij}$ indefinitamente differenziabili su U, tali che, per ogni $y \in U$, si abbia $\hat{h}|_{Y_y} = h_y$ (cfr. [5]).

In queste condizioni, diremo che $\mathcal{F}$ è *positivo* se per ogni $x \in X$ la funzione $\hat{\chi}(y, z) = \sum_{i,j} \hat{h}_{ij}(y) z_i \bar{z}_j$ definita su $U \times \mathbf{C}^p$ è fortemente pseudoconvessa al difuori della sezione nulla di $U \times \mathbf{C}^p$.

Questa definizione generalizza la definizione di fibrato metricamente pseudoconvesso data in [2]. Con leggere modifiche alla dimostrazione della Proposition 1 di [2] si ottengono i seguenti risultati:

PROPOSIZIONE 1. *Sia* $\mathcal{F}$ *un fascio positivo su una varietà complessa fortemente pseudoconvessa. Allora* $L(\mathcal{F})$ *è uno spazio fortemente q-pseudoconvesso.*

PROPOSIZIONE 2. *Se* $\mathcal{F}$ *è un fascio positivo su uno spazio complesso compatto,* $L(\mathcal{F})$ *è uno spazio fortemente 0-pseudoconvesso.*

COROLLARIO. *Un fascio positivo su uno spazio complesso compatto è debolmente positivo.*

Dalla Prop. 1 e dall'iniettività dell'applicazione (1), utilizzando i teoremi di finitezza di [1] per la coomologia degli spazi q-pseudoconvessi, si ottiene subito il

TEOREMA 2. *Sia* $\mathcal{F}$ *un fascio positivo su una varietà fortemente q-pseudoconvessa* X. *Per ogni fascio coerente* $\mathcal{E}$ *su* X *esiste un intero positivo* $k_0 = k_0(\mathcal{E})$ *tale che*

$$H^r(X, \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} S^k(\mathcal{F})) = 0 \qquad \text{per} \quad r > q \quad \text{e} \quad k \geq k_0 .$$

§ 2. GENERALIZZAZIONE DI UN TEOREMA DI KODAIRA E GRAUERT

Dato un fibrato vettoriale V su uno spazio complesso, esso è debolmente negativo nel senso di Grauert [4] se, e soltanto se, il fascio dei germi di sezioni olomorfe di V è debolmente positivo nel senso della definizione del § 1. In [4] Grauert dimostra che uno spazio complesso compatto che porti un fibrato vettoriale debolmente negativo può venire immerso in uno spazio proiettivo, generalizzando un risultato dimostrato da Kodaira [6] nel caso delle varietà e dei fibrati vettoriali di rango uno.

Nel caso di un fascio non necessariamente libero localmente si ha il

TEOREMA 3. *Sia* X *uno spazio complesso compatto irriducibile,* $\mathfrak{F}$ *un fascio debolmente positivo su* X *tale che* Supp $\mathfrak{F} = \mathrm{X}$. *Allora* X *è uno spazio di Moišezon.*

La dimostrazione utilizza essenzialmente il Teor. 1, grazie al quale si trova un numero finito di sezioni globali di $\mathrm{S}^k(\mathfrak{F})$ per un intero k opportuno, che separano i punti e danno coordinate locali sul complementare del sottoinsieme analitico A di X definito da: $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{X} \mid \mathfrak{F}_x$ non è libero su $\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}\}$. In virtù di un teorema di Rossi ([7], Theor. 3.5), si trova una modificazione propria $\tilde{\mathrm{X}}$ di X e un'applicazione olomorfa bimeromorfa di $\tilde{\mathrm{X}}$ su un sottospazio analitico di una grassmanniana. Se ne deduce che $\tilde{\mathrm{X}}$ è uno spazio di Moišezon, e quindi anche X lo è.

Con lo stesso genere di dimostrazione, ma sfruttando l'ipotesi invece del Teor. 1, si ottiene infine il

TEOREMA 4. *Siano* X *uno spazio complesso compatto irriducibile,* $\mathfrak{F}$ *un fascio analitico coerente su* X *e* $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{X} \mid \mathfrak{F}_x$ *non è libero su* $\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}\}$. *Se l'algebra* $\bigoplus_{k \geq 0} \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{S}^k(\mathfrak{F}))$ *separa i punti e dà coordinate locali su* $\mathrm{X} \setminus \mathrm{A}$, X *è uno spazio di Moišezon.*

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDREOTTI A. e GRAUERT H., *Theorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, « Bull. Soc. Math. de France », *90*, 193–259 (1962).

[2] ANDREOTTI A. e TOMASSINI G., *A remark on the vanishing of certain cohomology groups*, « Compositio Mathematica », *21*, 417–430 (1969).

[3] FISCHER G., *Lineare Faserräume und kohärente Modulgarben über komplexen Räume*, « Arch. Math. », *18*, 609–617 (1967).

[4] GRAUERT H., *Über Modifikationen und exzeptionnelle analytische Mengen*, « Math. Ann. », *146*, 331–368 (1962).

[5] GRAUERT H. e RIEMENSCHNEIDER O., *Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen*, « Inv. Math. », *11*, 263–292 (1970).

[6] KODAIRA K., *On Kähler varieties of restricted type*, « Ann. Math. », *60*, 28–48 (1954).

[7] ROSSI H., *Picard variety of an isolated singular point*, « Rice Univ. Studies », *54*, 63–73 (1968).