Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Constantin Nastasescu

Punti isolati nello spettro minimale di un anello

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.5, p. 677–684.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_5_677_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 maggio 1973

Presiede il Socio anziano FRANCO RASETTI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Algebra. — *Punti isolati nello spettro minimale di un anello.* Nota di CONSTANTIN NASTASESCU (*), presentata (**) dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — Dans ce travail on donne des conditions nécéssaires et suffisantes pour que Q(A) soit un produit quelconque de corps.

INTRODUZIONE

Nel presente lavoro ci siamo proposti di determinare delle condizioni necessarie e sufficienti, affinché l'anello massimale dei quozienti Q(A) dell'anello A sia un prodotto qualunque di corpi (Teorema 2.3).

Si ottengono in particolare i risultati di [4] e una parte dei risultati di [5].

DEFINIZIONI, NOTAZIONI E RISULTATI PRELIMINARI

Tutti gli anelli considerati in questo lavoro sono commutativi con identità. Se A è un anello, denotiamo con Mod A la categoria degli A-moduli unitari.

Sia ora F una topologia additiva su A oppure un sistema topologizzante e idempotente [2, cap. 5].

Indichiamo con $\mathfrak{F}$ la classe:

$$\mathfrak{F} = \{ M \mid M \in \operatorname{Mod} A \, , \ \forall x \in M \, , \ \operatorname{Ann}(x) \in F \}$$

(*) Questo lavoro è stato fatto mentre l'Autore usufruiva di una borsa di ricerca per matematici stranieri del C.N.R. presso l'Università degli Studi di Ferrara.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1973.

che è una sottocategoria localizzante ([2], cap. 3) di Mod. A. Per un A-modulo M qualunque denotiamo con FM il più grande sottomodulo di M che appartiene a F; cioè

$$\mathrm{FM} = \{x \in \mathrm{M} \mid \mathrm{Ann}(x) \in \mathrm{F}\} .$$

Un A-modulo M tale che $\mathrm{M} \in \mathcal{F}$ si dice di F-torsione; se FM = 0, allora M si dice F-senza torsione.

Per un A modulo M, indichiamo con $\mathrm{C_F}(\mathrm{M})$ l'insieme

$$\mathrm{C_F}(\mathrm{M}) = \{\mathrm{N} \subseteq \mathrm{M} \mid \mathrm{M/N} \text{ è F-senza torsione}\} .$$

Se poniamo per un sotto-modulo $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{M}$

$$\mathrm{N}^{\sim} = \{\mathrm{X} \in \mathrm{M} \mid (\mathrm{N} : x) \in \mathrm{F}\}$$

allora $\mathrm{N} \in \mathrm{C_F}(\mathrm{M})$ se e solo se $\mathrm{N} = \mathrm{N}^{\sim}$.

Inoltre l'insieme $\mathrm{C_F}(\mathrm{M})$ con la relazione di ordine inclusione è un reticolo modulare [7]. Poiché A è un A-modulo, possiamo parlare del reticolo $\mathrm{C_F}(\mathrm{A})$.

Data una topologia additiva F su A si può associare in modo canonico l'anello

$$\mathrm{A_F} = \varinjlim_{\boldsymbol{a} \in \mathrm{F}} \mathrm{Hom_A}(\boldsymbol{a}, \mathrm{A/FA}) \qquad ([2], \text{ cap. } 5)$$

che è un anello commutativo con identità.

Se M è un A-modulo si può associare l'A-modulo

$$\mathrm{M_F} = \varinjlim_{\boldsymbol{a} \in \mathrm{F}} \mathrm{Hom_A}(\boldsymbol{a}, \mathrm{M/FM})$$

che diventa nel modo canonico un $\mathrm{A_F}$-modulo. Esiste in modo canonico il morfismo

$$\psi(\mathrm{M}) : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M_F}$$

con la proprietà che $\ker \psi(\mathrm{M})$ e $\mathrm{coker}\ \psi(\mathrm{M})$ appartengono a F; inoltre $\mathrm{Ker}\ \psi(\mathrm{M}) = \mathrm{FM}$.

Per il caso M = A si ha il morfismo

$$\psi(\mathrm{A}) : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A_F}$$

che è un morfismo di anelli.

Se $\mathrm{FA} = \ker \psi(\mathrm{A}) = 0$, allora A è un sotto anello di $\mathrm{A_F}$.

Nel seguito supporremo che la topologia F *sia tale che* FA = 0, *cioè* A *è un* A-*modulo* F *senza torsione.*

Poniamo

$$\mathrm{F}^e = \{\boldsymbol{b} \subseteq \mathrm{A_F} \mid \boldsymbol{b} \cap \mathrm{A} \in \mathrm{F}\} .$$

Da [2] risulta che F^e è una topologia additiva sull'anello $\mathrm{A_F}$. Si vede subito che l'ideale $\boldsymbol{b} \subseteq \mathrm{A_F}$ appartiene a F^e se e solo se $\mathrm{A_F}/\boldsymbol{b}$ è un F-modulo di torsione. Inoltre da [2] segue anche $(\mathrm{A_F})_{\mathrm{F}^e} \cong \mathrm{A_F}$.

Indichiamo con Spec A, l'insieme degli ideali primi con la topologia di Zariski.

Se $\boldsymbol{a}$ è un ideale in A poniamo:

$$V_A(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{p} \in \operatorname{Spec} A,\ a \subseteq p\}.$$

Al variare di $\boldsymbol{a}$, $V_A(a)$ descrive la famiglia dei chiusi in Spec A; indichiamo con $D_A(\boldsymbol{a}) = \operatorname{Spec} A - V_A(\boldsymbol{a})$ gli aperti.

Infine poniamo

$$\operatorname{Spec} C_F(A) = C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A$$

con la topologia indotta.

LEMMA 1.1. *Se* F *è una topologia su* A *e* $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Spec} A$ *allora* $p \notin F \Longleftrightarrow \boldsymbol{p} \in \operatorname{Spec} C_F(A)$.

Dimostrazione. Poiché $p \notin F$ allora $\boldsymbol{p}^{\sim} \neq A$. Sia $\lambda \in \boldsymbol{p}^{\sim}$; risulta che $(\boldsymbol{p} : \lambda) = \boldsymbol{a} \in F$. Da qui segue $\boldsymbol{a}\lambda \subseteq \boldsymbol{p}$.

Poiché $\boldsymbol{p} \not\subset F$ allora $\boldsymbol{a} \notin p$ e quindi $\lambda \in \boldsymbol{p}$, cioè $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^{\sim}$.

TEOREMA 1.2. *Sia* F *una topologia additiva su* A; *le affermazioni che seguono sono vere*:

1) *Se* $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Spec} C_F(A)$ *allora* $p_F \in C_{F^e}(A_F)$. *Indichiamo con* $\varphi : \operatorname{Spec} C_F(A) \to \operatorname{Spec} C_{F^e}(A_F)$ *l'applicazione* $p \to p_F$.

2) φ *è biettiva. Il suo inverso è l'applicazione*

$$\boldsymbol{q} \longrightarrow \boldsymbol{q} \cap A ;$$

3) φ *è un omeomorfismo di spazi topologici.*

Dimostrazione. 1) e 2) sono date in ([2], esercizio 21, Cap. II). 3) Sia $V_A(\boldsymbol{a})$ un insieme chiuso di $\operatorname{Spec} C_F(A)$, allora

$$\varphi(V_A(\boldsymbol{a})) = V_{A_F}(\boldsymbol{a} A_F).$$

Infatti: se $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Spec} C_F(A)$, $\boldsymbol{p} \supseteq \boldsymbol{a}$, allora $p_F \supset \boldsymbol{p} \supset \boldsymbol{a}$ e quindi $\boldsymbol{p}_F \supseteq \boldsymbol{a} A_F$, cioè $p_F \in V_{A_F}(\boldsymbol{a} A_F)$.

Viceversa: se $q \in V_{A_F}(\boldsymbol{a} A_F)$, allora $\boldsymbol{a} A_F \subseteq \boldsymbol{q}$ e quindi $\boldsymbol{a} \subseteq q$; da qui discende che $\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{q} \cap A$, cioè $q \cap A \in V_A(\boldsymbol{a})$. Poiché $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q} \cap A)_F$ allora $\boldsymbol{q} \in \varphi(V_A(\boldsymbol{a}))$.

Proviamo adesso che se $f \in A_F$, allora $\varphi^{-1}(V_{A_F}(f) \cap C_{F^e}(A_F))$ è un insieme chiuso in $\operatorname{Spec} C_F(A)$.

Infatti poiché $f \in A_F$ esiste $\boldsymbol{a} \in F$ tale che $\boldsymbol{a}f \subset A$.

Se $\boldsymbol{p} \in \varphi^{-1}(V_{A_F}(f) \cap C_{F^e}(A))$, allora $f \in \boldsymbol{p}_F$ e quindi $\boldsymbol{a}f \subset p_F \cap A = \boldsymbol{p}$; da qui segue che $\boldsymbol{p} \in V_A(\boldsymbol{a}f) \cap \operatorname{Spec} C_F(A)$.

Viceversa, se $\boldsymbol{p} \in V_A(\boldsymbol{a}f) \cap \operatorname{Spec} C_F(A)$, allora $\boldsymbol{a}f \subseteq p \subseteq p_F$.

Poiché $\boldsymbol{a} \not\subset p$ (Lemma 1.1), allora $\boldsymbol{a} \not\subset p_F$ e quindi $f \in p_F$. In conclusione noi abbiamo dimostrato che

$$\varphi^{-1}(V_{A_F}(f) \cap C_{F^e}(A_F)) = V_A(\boldsymbol{a}f) \cap \operatorname{Spec} C_F(A).$$

Quindi φ è un omeomorfismo.

Diciamo che una topologia additiva F su A è stabile [3], se $F = \bigcap_{\boldsymbol{p} \in \operatorname{Spec} C_F(A)} F_p$ dove F_p è la topologia additiva

$$F_p = \{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a} \not\subset p\}.$$

PROPOSIZIONE 1.3. *Sia* F *una topologia additiva su* A. *Allora* F *è stabile se e solo se* F^e *è stabile su* A_F.

Dimostrazione. Supponiamo che F sia stabile. È chiaro che sempre

$$F^e \subseteq \bigcap_{q \in \operatorname{Spec} C_{F^e}(A_F)} F_q^e .$$

Sia ora $\boldsymbol{a}^* \in \bigcap_{\boldsymbol{q} \in \operatorname{Spec} C_{F^e}(A_F)} F_q^e$, allora $\boldsymbol{a}^* \not\subset \boldsymbol{q}$ per ogni $q \notin F^e$.

Supponiamo che $\boldsymbol{a}^* \cap A \notin F$, risulta che esiste un $p \in F$ tale che $\boldsymbol{a}^* \cap A \subset \boldsymbol{p}$. Sia $q = p_F \notin F^e$. Poiché $\boldsymbol{a}^* \not\subset q$, esiste un elemento $f \in \boldsymbol{a}^*$, $f \notin q$.
D'altra parte, esiste un ideale $\boldsymbol{b} \in F$ tale che $\boldsymbol{b}f \subseteq A$.
Quindi $\boldsymbol{b}f \subseteq \boldsymbol{a}^* \cap A$; da qui segue che $\boldsymbol{b}f \subset p \subset p_F = q$.
Poiché $f \notin q$ risulta che $\boldsymbol{b} \subseteq q$ e quindi $\boldsymbol{b} \subseteq q \cap A = \boldsymbol{p}$, cioè $\boldsymbol{p} \in F$, assurdo.
Supponiamo ora che F^e sia stabile. Dobbiamo provare soltanto che

$$\bigcap_{\boldsymbol{p} \in \operatorname{Spec} C_F(A)} F_{\boldsymbol{p}} \subseteq F .$$

Sia $\boldsymbol{a} \in \bigcap_{p \in \operatorname{Spec} C_F(A)} F_p$; allora $\boldsymbol{a} \not\subset p$ per ogni $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Spec} C_F(A)$.

Poiché $\boldsymbol{a}$ è F–senza torsione (A è F–senza torsione) allora esiste la sequenza esatta canonica

$$o \longrightarrow \boldsymbol{a} \xrightarrow{\psi(\boldsymbol{a})} \boldsymbol{a}_F \longrightarrow \operatorname{coker} \psi(a) \longrightarrow o \ (*).$$

Se $q \in \operatorname{Spec} C_{F^e}(A_F)$ e $\boldsymbol{a}_F \subseteq \boldsymbol{q}$ allora $\boldsymbol{a} \subseteq q \cap A$, assurdo.
Quindi $\boldsymbol{a}_F \in \bigcap_{q \in C_{F^e}(A_F)} F_q^e = F^e$ e di qui discende che $\boldsymbol{a}_F \cap A \in F$.

Dalla sequenza esatta $(*)$ e poiché $\operatorname{coker} \psi(\boldsymbol{a})$ è di F–torsione, risulta che $\boldsymbol{a}_F \cap A/\boldsymbol{a}$ è di F–torsione.
Dalla sequenza esatta canonica

$$o \longrightarrow \boldsymbol{a}_F \cap A/\boldsymbol{a} \longrightarrow A/\boldsymbol{a} \longrightarrow A/\boldsymbol{a}_F \cap A \longrightarrow o$$

segue che $A/\boldsymbol{a}$ è di F–torsione cioè $\boldsymbol{a} \in F$.

LEMMA 1.4. *Sia* F *una topologia additiva su* A.
Denotiamo con T_F, S_F i funtori canonici

$$T_F : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} A/\mathfrak{F} \quad ; \quad S_F : \operatorname{Mod} A/\mathfrak{F} \to \operatorname{Mod} A \ ([2], \text{cap. } 3).$$

Se $\boldsymbol{p} \in C_F(A)$ è un elemento massimale allora $T_F(A/p)$ è un oggetto semplice nella categoria $\operatorname{Mod} A/\mathfrak{F}$.

Viceversa: se $X \in \operatorname{Mod} A/\mathfrak{F}$ è un oggetto semplice allora esiste un ideale primo $\boldsymbol{p} \in C_F(A)$, elemento massimale tra gli elementi di $C_F(A)$ tale che

$$X \cong T_F(A/p).$$

Dimostrazione. Sia $p \in C_F(A)$ un elemento massimale (che è un ideale primo) e sia $Y \subseteq T_F(A/p)$ un sotto–oggetto diverso da zero.

Allora $S_F(Y) \neq 0$ e $S_F(Y) \cap A/p \neq 0$.

Se poniamo $S_F(Y) \cap A/p = \boldsymbol{b}/\boldsymbol{p}$ allora $p \subsetneqq \boldsymbol{b}$, cioè $\boldsymbol{b} \in F$.

Dalla sequenza esatta

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{b}/\boldsymbol{p} \longrightarrow A/\boldsymbol{p} \longrightarrow A/b \longrightarrow 0$$

risulta che $T_F(\boldsymbol{b}/\boldsymbol{p}) = T_F(A/p)$. D'altra parte $T_F(\boldsymbol{b}/\boldsymbol{p}) \subseteq T_F(S_F(Y)) = Y$, e quindi $Y = T_F(A/p)$ cioè $T_F(A/p)$ è un oggetto semplice.

Per dimostrare il viceversa si utilizza il Lemma 6.5 [7].

2. PUNTI ISOLATI NELLO SPETTRO MINIMALE

Tutti gli anelli considerati in questo paragrafo sono commutativi con identità e senza *elementi nilpotenti*.

Un ideale $\boldsymbol{a} \subset A$ si dice denso se $\operatorname{Ann}(\boldsymbol{a}) = 0$.

Poiché l'anello A è ridotto, allora $\boldsymbol{a}$ è denso se e solo se $\boldsymbol{a}$ è un ideale essenziale ([2], Cap. 2).

Indichiamo con

$$D = \{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a} \subseteq A, \boldsymbol{a} \text{ denso}\}$$

che è una topologia additiva su A. L'anello A_D lo denoteremo con $Q(A)$. Si sa che $Q(A)$ è un anello regolare nel senso di Von Neumann e autoiniettivo.

L'anello $Q(A)$ si chiama l'*anello massimale dei quozienti associato all'anello* A.

Indichiamo con $\operatorname{Min} A$ lo spettro minimale dell'anello A cioè l'insieme degli ideali primi minimali con la topologia di Zariski. Si sa che $\operatorname{Min} A$ è uno spazio topologico di Hausdorff e che ogni parte ammette una base di intorni chiusi e aperti.

LEMMA 2.1. *Sia* $\boldsymbol{p}$ *un ideale primo. Le affermazioni che seguono sono equivalenti*:

1) $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Min} A$ *ed è isolato*;
2) $\boldsymbol{p}$ *non è denso in* A;
3) $\boldsymbol{p} \in C_D(A)$;
4) *esiste* $x \in A$, $x \neq 0$, *tale che* $\boldsymbol{p} = \operatorname{Ann}(x)$;
5) p_D *è un punto isolato in* $\operatorname{Spec} Q(A)$.

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2) Poiché p è isolato in $\operatorname{Min} A$, risulta che

$$\operatorname{Min} A - \{p\} = V(a) \cap \operatorname{Min} A, \qquad \text{dove} \quad \boldsymbol{a} \neq 0.$$

Quindi $\boldsymbol{a} \subset \bigcap_{\substack{q \in \operatorname{Min} A \\ q \neq p}} \boldsymbol{q}$. Sia $\lambda \in \boldsymbol{a}$, $\lambda \neq 0$; se μ è un elemento qualunque di $\boldsymbol{p}$ allora $\lambda\mu \in \boldsymbol{a} \cap p = 0$ cioè $\lambda \in \operatorname{Ann}(p)$ e quindi $\boldsymbol{p}$ non è denso in A;

2) $\Longleftrightarrow$ 3) risulta dal Lemma 1.1;

3) $\Longrightarrow$ 4) Poiché $\boldsymbol{p}$ non è denso, esiste $x \notin p$ tale che $Ax \cap p = 0$ e quindi $\operatorname{Ann}(x) \subseteq \boldsymbol{p}$. Se ora $\lambda \in \boldsymbol{p}$ allora $\lambda x = 0$ cioè $\lambda \in \operatorname{Ann}(x)$. In conclusione $\boldsymbol{p} = \operatorname{Ann}(x)$;

4) $\Longrightarrow$ 1) Poiché $\boldsymbol{p} = \operatorname{Ann}(x)$, allora $x \notin p$. Se ora $\boldsymbol{q}$ è un ideale primo contenuto in $\boldsymbol{p}$, allora per ogni $\lambda \in \boldsymbol{p}$, risulta $\lambda x = 0$ e da qui discende che $\lambda \in \boldsymbol{q}$ e quindi $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$. Dunque $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Min} A$.

Ora si vede subito che

$$(V(\operatorname{Ann}(x)) \cap \operatorname{Min} A) \cup (V(Ax) \cap \operatorname{Min} A) = \operatorname{Min} A$$

$$(V(\operatorname{Ann}(x)) \cap \operatorname{Min} A) \cap (V(Ax) \cap \operatorname{Min} A) = \varnothing$$

cioè $\boldsymbol{p}$ è un punto isolato in Min A.

3) $\Longleftrightarrow$ 5) segue dal Teorema 1.2.

Se $\boldsymbol{p} \in A$ è un ideale primo in A, denotiamo con $K(A/p)$ il corpo delle frazioni di A/p.

COROLLARIO 2.2. *Se $p \in \operatorname{Min} A$ è punto isolato, allora*

$$K(A/p) \cong Q(A)/p_D .$$

Dimostrazione. Poiché $A/p \subseteq Q(A)/\boldsymbol{p}_D$ allora $K(A/p) \subseteq Q(A)/\boldsymbol{p}_D$.

Dal ([1] esercizio 21, cap. II) risulta che $K(A/p) = (A/p)_D$.

Dalla sequenza esatta

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{p}_D \longrightarrow Q(A) \longrightarrow (A/\boldsymbol{p})_D$$

risulta che $Q(A)/\boldsymbol{p}_D \subseteq (A/p)_D$ e quindi $K(A/\boldsymbol{p}) = Q(A)/\boldsymbol{p}_D$.

TEOREMA 2.3. *Sia* A *un anello ridotto. Le affermazioni che seguono sono equivalenti*:

1) *L'insieme dei punti isolati di* Min A *è denso in* Min A;

2) Q (A) *è un prodotto qualunque di corpi*;

3) D *è una topologia stabile*;

4) *La categoria quoziente* [2] $\operatorname{Mod} A/\mathfrak{D}$ *è semi-artiniana* [8] ($\mathfrak{D}$ *è la categoria localizzante associata alla topologia additiva* D) (*semi-semplice*).

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 3). Denotiamo con X_0 l'insieme dei punti isolati di Min A e Y_0 l'insieme dei punti isolati di Spec Q (A).

Poiché X_0 è denso in Min A allora $\bigcap_{p \in X_0} p = 0$.

Sia $\boldsymbol{a} \in \bigcap_{p \in X_0} F_p$; allora $\boldsymbol{a} \not\subset \boldsymbol{p}$ per ogni $\boldsymbol{p} \in X_0$.

D'altra parte poiché A è ridotto risulta che $\operatorname{Ann} \boldsymbol{a} \subseteq p$ per ogni $p \in X_0$, cioè $\operatorname{Ann}(\boldsymbol{a}) = 0$ e quindi $\boldsymbol{a}$ è denso.

3) $\Rightarrow$ 1) Supponiamo che $\boldsymbol{a} = \bigcap_{p \in X_0} \boldsymbol{p} \neq 0$. Allora $\operatorname{Ann} \boldsymbol{a} \neq 0$ ed $\boldsymbol{a} + \operatorname{Ann} \boldsymbol{a}$ è un ideale denso, quindi $\boldsymbol{a} + \operatorname{Ann}(\boldsymbol{a}) \in D$, cioè $\boldsymbol{a} + \operatorname{Ann} \boldsymbol{a} \not\subset p$ per ogni $p \in X_0$.

Di qui segue Ann $\boldsymbol{a} \not\subset \boldsymbol{p}$ per ogni $p \in X_0$, quindi Ann $\boldsymbol{a} \in F$, cioè Ann $\boldsymbol{a}$ è denso.

D'altra parte $\boldsymbol{a} \cap \mathrm{Ann}\, \boldsymbol{a} = 0$ e quindi $\boldsymbol{a} = 0$; assurdo.

2) $\Rightarrow$ 3) Poiché Q (A) è un prodotto di corpi risulta che lo zoccolo s_0 (Q (A)), cioè la somma degli ideali minimali, è denso in Q(A). Di qui discende che l'insieme dei punti isolati di Spec Q(A) è denso. Allora risulta che D^e è «stabile» e quindi D è stabile (Proposizione 1.3).

3) $\Rightarrow$ 2) Poiché D è stabile, allora D^e è stabile e quindi l'insieme di tutti i punti isolati di Spec Q (A) è denso; di qui segue che S_0 (Q (A)) è un ideale essenziale in Q (A), e quindi Q (A) è prodotto di corpi.

1) $\Rightarrow$ 4) Denotiamo con $T_D : \mathrm{Mod}\, A \to \mathrm{Mod}\, A/\mathfrak{D}^e$ e $S_D : \mathrm{Mod}\, A/\mathfrak{D} \to$ $\to \mathrm{Mod}\, A$ i funtori canonici (2, cap. 3).

Sia ora M un A–modulo D–senza torsione diverso da zero.

Se $x \in M$, $x \neq 0$, allora Ann $(x) \in C_D$ (A).

Esiste una famiglia $(\boldsymbol{p}_i)_{i \in I}$ di ideali primi che appartengono a X_0, tale che Ann $(x) = \bigcap_{i \in I} p_i$.

Sia p_i un ideale primo tale che Ann $(x) \subsetneq p_i$.

Poiché $p_i = \mathrm{Ann}\,(x_i)$, dove $x_i \notin p_i$, risulta che $(\mathrm{Ann}\,(x) : x_i) = p_i$, cioè A/Ann (x) contiene un sotto modulo isomorfo con A/p_i. Dal Lemma 1.4 segue che T_F (Ax) contiene sotto–oggetto semplice, cioè T_F(M) contiene un sotto–oggetto semplice non nullo. Dal [8] risulta allora che Mod A/$\mathfrak{D}$ è una categoria semi–artiniana (anche semi–semplice).

4) $\Rightarrow$ 3) Sia $\boldsymbol{a} \in \bigcap_{\boldsymbol{p} \in \mathrm{Spec}\, C_D (A)} F_p$, cioè $\boldsymbol{a} \not\subset \boldsymbol{p}$ per ogni $\boldsymbol{p} \in \mathrm{Spec}\, C_D$ (A). Supponiamo che $T_F (A/\boldsymbol{a}) \neq 0$.

Poiché Mod A/$\mathfrak{D}$ è semi–artiniana risulta che $T_F (A/\boldsymbol{a})$ contiene sotto–oggetto semplice X e non nullo.

Poiché $X \cong T_F (A/p)$ dove $p \in X_0$ (Lemma 1.4) esiste un elemento $x \in A$ tale che $(\boldsymbol{a} : x) = \boldsymbol{p}$; di qui segue che $\boldsymbol{a} \subsetneq p$; assurdo.

Quindi $T_F (A/\boldsymbol{a}) = 0$ cioè $A/\boldsymbol{a} \in \mathfrak{D}$ e ciò mostra che $\boldsymbol{a} \in D$.

COROLLARIO 2.4. *Sia* A *un p.m. anello* [6] (*cioè un anello con la proprietà: ogni ideale primo è contenuto in un solo ideale massimale*). *Se il radicale di Jacobson è zero allora le affermazioni che seguono sono equivalenti*;

1) Q (A) *è un prodotto qualunque di corpi*;

2) *l'insieme dei punti isolati dello spettro massimale* max A, *è denso.*

Dimostrazione 1) $\Rightarrow$ 2). Dal Teorema 2.3, X_0 (l'insieme dei punti isolati di Min A) è denso in Min A.

Sia $\boldsymbol{p} \in X_0$ e $\boldsymbol{m} \subset A$, l'unico ideale massimale che contiene $\boldsymbol{p}$. Poiché il radicale di Jacobson è zero, allora $\boldsymbol{m}$ è una estensione essenziale di $\boldsymbol{p}$.

D'altra parte poiché $\boldsymbol{p}$ è non essenziale in A (Lemma 2.1) allora $\boldsymbol{m}$ è non essenziale in A; cioè $\boldsymbol{m} = \mathrm{Ann}\,(x)$ con $x \notin \boldsymbol{m}$. È chiaro che $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{m} = \mathrm{Ann}\,(x)$ e pertanto l'insieme dei punti isolati di max A è denso.

Reciprocamente; si fa il cammino inverso.

COROLLARIO 2.5. *Sia* X *uno spazio topologico* (*completamente regolare*) *e* C (X) *l'anello delle funzioni continue e reali su* X. *Allora* Q (C (X)) *è un prodotto di corpi se e soltanto se l'insieme dei punti isolati di* X *è denso.*

Dimostrazione. C (X) è un p.m. anello [6].

Questo risultato è stato ottenuto in [4] e [5].

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, Ch. 1 et 2.

[2] P. GABRIEL, *Des catégories abéliennes*, « Bull. Soc. Math. France », *90*, 325–448 (1962).

[3] M. HACQUE, *Localisations commutatives stables*, « C.R. Acad. Sci. Paris », *270*, 995–998 (1970).

[4] A. HAGER, *Isomorphism with a C (X) of the maximal ring of quotients of C (X)*, « Fund. Mathematicae », *66* (1969).

[5] G. DE MARCO, *Real ideals in the maximal ring of quotients of C (X)*, « Rendiconti di Padova » (in corso di stampa).

[6] G. DE MARCO e A. ORSATTI, *Commutative rings in which every prime ideal is contained in a unique maximal ideal*, « Proceedings Amer. Math. Soc. », *30*, (3) (1971).

[7] C. NASTASESCU, *La structure des modules par rapport à une topologie additive. Tôhoku*, « Math. Journal », *25* (1973) (à paraître).

[8] C. NASTASESCU e N. POPESCU, *Anneaux semi-artiniens*, « Bull. Soc. Math. France », *96*, 357–368 (1968).