Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mimmo Iannelli

Quelques remarques sur les semi-groupes non-lineaires non-contractifs

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.5, p. 694–698.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_5_694_0>

Analisi matematica. — *Quelques remarques sur les semi-groupes non-lineaires non-contractifs.* Nota di MIMMO IANNELLI (*), presentata (**) dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

RIASSUNTO. — Si considerano gli operatori R-derivabili introdotti in un precedente lavoro e si dimostra la convergenza della formula esponenziale sotto un'ipotesi di stabilità della R-derivata. Si dimostra inoltre che se la R-derivata dell'operatore è in ogni punto generatore di un semigruppo analitico, in un settore del piano complesso, il semigruppo ottenuto come limite della formula esponenziale, è analitico nello stesso settore.

1. INTRODUCTION

On va reprendre ici les opérateurs R-dérivables déjà considérés dans [3] et on va démontrer la convergence de la formule exponentielle à un semi-groupe non-contractif, sous l'hypothèse de stabilité considerée dans [3]. En fait telle condition de stabilité correspond essentiellement à la possibilité de définir une norme equivalente dans l'espace où l'on travaille, par rapport à laquelle on est bien dans les conditions du théorème de Crandall et Ligget ([1]). En ce qui concerne la régularité du semigroupe qu'on obtient comme limite de la formule exponentielle on retombe dans la problematique presentée dans [1]: toutefois, si la R-derivée de l'operateur en question est dans chaque point, générateur d'un semi-groupe analytique dans un secteur du plan complexe, le semi-groupe engendré par l'operateur est analytique dans le même secteur (c.f. Kōmura [4]).

2. QUELQUES DÉFINITIONS

On considère l'espace de Banach X (norme $|\cdot|$), un ensemble convexe fermé C dans X et l'opérateur $A : D_A \subset C \to X$.

On note $\rho_c(A)$ (ensemble résolvant de A par rapport à C) l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que (1):

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \text{i)} & (\lambda - A) \ \textit{est injectif} \\ \text{ii)} & C_A(\lambda) = (\lambda - A)(D_A) \ \textit{est fermé et} \ C_A(\lambda) \supset \lambda C \\ \text{iii)} & (\lambda - A)^{-1} : C_A(\lambda) \to C \ \textit{est continu} \end{cases}$$

On peut définir l'application résolvante:

$$R_c(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1} : C_A(\lambda) \to C .$$

(*) Istituto per le Applicazioni del Calcolo (I.A.C.), Roma.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1973.

(1) Cfr. DA PRATO [2]. On remarque que les définitions suivantes et les resultats qu'on va etablir dans la suite sont valables aussi pour des opérateurs multivoques.

On a:

LEMME 2–1 (identité de la résolvante). *Soit* $A : D_A \subset C \to X$, $\lambda, \mu \in \rho_c(A)$, *alors si* $x \in C_A(\lambda)$ *on a*

$$x + (\mu - \lambda) R_c(\lambda, A) x \in C_A(\mu) \tag{2.2}$$

$$R_c(\lambda, A) x = R_c(\mu, A) [x + (\mu - \lambda) R_c(\lambda, A) x] . \tag{2.3}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer l'identité suivante:

$$(\mu - A) R_c(\lambda, A) x = x + (\mu - \lambda) R_c(\lambda, A) x \tag{2.4}$$

d'où (2.2) et (2.3).

Si on suppose maintenant que pour chaque $\lambda \in E \subset \rho_c(A)$ on a:

$$\begin{cases} C_A(\lambda) = \overline{\overset{\circ}{C_A}(\lambda)}\ ^{(2)} \\ R(\lambda, A) : C_A(\lambda) \to C \ \textit{est F–derivable}\ ^{(3)}\ \textit{dans chaque point}\ x \in C_A(\lambda). \end{cases} \tag{2.5}$$

on peut considérer:

$$F(\lambda) = R'_c(\lambda, A) [\lambda x - Ax] \in \mathfrak{L}(X, X)\ ^{(4)} \qquad \forall x \in D_A \tag{2.6}$$

$F(\lambda)$ est une pseudo–résolvante comme on peut le démontrer en utilisant le Lemme 2–1: il existe donc un opérateur linéaire (en general multivoque) $A'[x] : D_x \to X \quad \forall x \in D_A$ tel que:

$$F(\lambda) = R(\lambda, A'[x]) . \tag{2.7}$$

DÉFINITION 2–1. *On dira que l'opérateur* $A : D_A \subset C \to X$ *est R–dérivable dans* D_A, *par rapport à l'ensemble* $E \subset \rho_c(A)$, *si* (2.5) *est verifiée pour tout* $\lambda \in E$. *On appellera R–dérivée de A dans* $x \in D_A$ *l'opérateur* $A'[x] : D_x \to X$ *defini par* (2.6).

On peut alors préciser la dépendance de $R_c(\lambda, A)$ de la variable λ.

LEMME 2–2. *Soit* $A : D_A \subset C \to X$, *R–dérivable par rapport à l'ouvert* $\Omega \subset \rho_c(A)$, $f(\lambda)$ *une fonction analytique de la variable* λ, *telle que* $f(\lambda) \in C_A(\lambda)$.

Si la fonction $\lambda \mapsto R(\lambda, A) f(\lambda)$ *est bornée dans chaque ouvert borné* $\Omega' \subset \Omega$ *elle est analytique dans* Ω.

(2) $\overset{\circ}{E}$ denote l'interieur de l'ensemble E.

(3) On dit que l'opérateur $A : D_A \to X$ $(D_A = \overline{\overset{\circ}{D}_A})$ est F–derivable dans $x \in D_A$ s'il existe l'opérateur linéaire borné $A'[x] : X \to X$ tel que pour tout $y \in D_A$:

$$Ay = Ax + A'[x](y - x) + \vartheta(y - x)$$

ou:

$$|\vartheta(y - x)| \leq |y - x| \psi(|y - x|) \quad ; \quad \psi(r) \xrightarrow[r \to 0]{} 0$$

Cette definition est bien posée pour les points x de la frontière de D_A.

(4) $\mathfrak{L}(X, X)$ est la classe des opérateurs linéaires bornés de X dans X, $\|A\|$ étant la norme de $A \in \mathfrak{L}(X, X)$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \Omega$, $\lambda + \Delta\lambda \in \Omega$, on a (Lemme 2–1)

$$R_c(\lambda+\Delta\lambda , A) f(\lambda+\Delta\lambda) = R_c(\lambda , A) [f(\lambda + \Delta\lambda) - \Delta\lambda R_c(\lambda + \Delta\lambda , A) f(\lambda + \Delta\lambda)]$$

$$R_c(\lambda + \Delta\lambda , A) f(\lambda + \Delta\lambda) - R_c(\lambda , A) f(\lambda) =$$
$$= R_c'(\lambda , A) [f(\lambda)] (f(\lambda+\Delta\lambda) - f(\lambda) - \Delta\lambda\, R_c(\lambda+\Delta\lambda , A) f(\lambda+\Delta\lambda)) + \vartheta(\Delta\lambda)$$

ce qui entraîne d'abord que $R_c(\lambda + \Delta\lambda , A) f(\lambda + \Delta\lambda) \xrightarrow[\Delta\lambda \to 0]{} R_c(\lambda , A) f(\lambda)$ et puis que:

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{1}{\Delta\lambda} (R_c(\lambda + \Delta\lambda , A) f(\lambda + \Delta\lambda) - R_c(\lambda , A) f(\lambda) =$$
$$= R_c'(\lambda , A) [f(\lambda)] (f'(\lambda) - R_c(\lambda , A) f(\lambda)) .$$

On introduit maintenant les definitions suivantes:

DÉFINITION 2–2. *On dira que l'opérateur* $A : D_A \subset C \to X$ *appartient à la classe* $K_L^{M,w}(C)$ $(M > 0 , w \in \mathbf{R})$ *si*:

$$(2.8) \qquad \begin{cases} \rho_c(A) \supset (w , +\infty) \\ R_c(\lambda , A) : C_A(\lambda) \to C \quad \textit{est lipschitzienne}; \\ | R_c(\lambda , A) |_L{}^{(5)} \leq \dfrac{M}{|\lambda - w|} \qquad \forall \lambda > w . \end{cases}$$

DÉFINITION 2–3. *On dira que l'opérateur* $A : D_A \subset C \to X$ *appartient à la classe* $H_L^{M,w,\vartheta}(C)$ $(M > 0 , w \in \mathbf{R} , \vartheta \in [0 , \pi/2))$ *si*:

$$(2.9) \qquad \begin{cases} \rho_c(A) \supset \Sigma_{\vartheta,w} \equiv \{\lambda \mid |\arg(\lambda - w)| < \vartheta , \operatorname{Re}(\lambda) > w\} \\ R_c(\lambda , A) : C_A(\lambda) \to C \quad \textit{est lipschitzienne}; \\ | R_c(\lambda , A) |_L \leq \dfrac{M}{|\lambda - w|} \qquad \forall \lambda \in \Sigma_{\vartheta,w} \end{cases}$$

3. STABILITÉ ET FORMULE EXPONENTIELLE

Soit $A : D_A \subset C \to X$ un opérateur de la classe $K_L^{M,w}(C)$, R–dérivable par rapport à $(w, +\infty)$. On considère la condition suivant (stabilité) sur la R–dérivée

$$(S_1) \qquad \begin{cases} \text{pour tout } k \in \mathbf{N}^{(6)}, \ \{x_1 \cdots x_k\} \subset D_A , \qquad \lambda \in (w , +\infty) \\ \left\| \prod_1^k {}_i R(\lambda , A'[x_i]) \right\| \leq \dfrac{M}{(\lambda - w)^k} \end{cases}$$

où $\prod_1^k {}_i$ denote le produit ordonné par i croissant.

(5) $|A|_L$ denote la norme de Lipschitz de l'opérateur A.

(6) **N** est l'ensemble des nombres entiers positifs.

On a alors

Théorème 3–1. *Soit* $A : D_A \subset C \to X$ *un opérateur de classe* $K_L^{M,w}(C)$, R*–dérivable par rapport à* $(w, +\infty)$, *vérifiant la condition* (S_1). *Il existe alors un unique semi–groupe* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *sur* $\bar{D}_A$ *tel que*:

$$(3.1)\qquad \begin{cases} G(t)\,x = \lim\limits_{n\to\infty}\left[R_c\left(\frac{n}{t}\,,A\right)\frac{n}{t}\right]^n x & \forall t > 0 \quad \forall x \in \overline{D_A} \\ |G(t)|_L \leq M e^{wt} & \forall t \geq 0\,. \end{cases}$$

Démonstration. On note d'abord que la condition (S_1) est en fait equivalente à la suivante:

$$(S_1')\qquad \begin{cases} \text{pour tout } k \in \mathbf{N}\,, \quad \{x_1 \cdots x_k\} \subset D_A\,, \{\lambda_1 \cdots \lambda_k\} \subset (w, +\infty) \\ \left\| \prod_1^k {}_i\, R(\lambda_i, A'[x_i]) \right\| \leq \dfrac{M}{\prod_1^k {}_i (\lambda_i - w)}\,. \end{cases}$$

En effet (S_1') entraine de manière evident (S_1): on va maintenant demontrer que (S_1) entraine (S_1'). Soit donc $k \in \mathbf{N}$, $\{x_1 \cdots x_k\} \subset D_A$, $\{\lambda_1 \cdots \lambda_k\} \subset (w, +\infty)$, on considère $\mu > \lambda_i$ $(i = 1 \cdots k)$, on a:

$$R(\lambda_i, A'[x_i]) = R(\mu, A'[x_i])\,[I + (\lambda_i - \mu)\,R(\mu, A'[x_i])]^{-1} \qquad i = 1 \cdots k$$

$$R(\lambda_i, A'[x_i]) = \sum_0^\infty {}_{h_i} (\mu - \lambda_i)^{h_i}\, R^{h_i+1}(\mu, A'[x_i]) \qquad i = 1 \cdots k$$

et donc:

$$\left\| \prod_1^k {}_i\, R(\lambda_i, A'[x_i]) \right\| =$$

$$= \left\| \sum_0^\infty {}_{h_1} \cdots \sum_0^\infty {}_{h_k} (\mu - \lambda_1)^{h_1} \cdots (\mu - \lambda_k)^{h_k}\, R^{h_1+1}(\mu, A'[x_1]) \cdots R^{h_k+1}(\mu, A'[x_k]) \right\| \leq$$

$$\leq M \sum_0^\infty {}_{h_1} \cdots \sum_0^\infty {}_{h_k} \frac{(\mu - \lambda_1)^{h_1}}{(\mu - w)^{h_1+1}} \cdots \frac{(\mu - \lambda_k)^{h_k}}{(\mu - w)^{h_k+1}} = \frac{M}{\prod_1^k {}_i (\lambda_i - w)}\,.$$

On appelle alors X_* l'espace X muni de la norme suivante:

$$|x|_* = \sup_{\substack{k \in \mathbf{N} \\ \{x_1 \cdots x_k\} \subset D_A \\ \{\lambda_1 \cdots \lambda_k\} \subset (w, +\infty)}} \left\{ |x|\,;\, \left| \prod_1^k {}_i (\lambda_i - w)\, R(\lambda_i, A'[x_i])\, x \right| \right\}, \quad \forall x \in X$$

la norme $|\cdot|_*$ est equivalent à la norme $|\cdot|$ puisque:

$$(3.2)\qquad |x| \leq |x|_* \leq M\,|x|$$

grâce à la condition (S_1'). De plus, l'opérateur A appartient à la classe $K_L^{1,w}(C)$, en fait on a:

$$(3.3)\qquad |(\lambda - w)\, R_c'(\lambda, A)\,[x]\, y|_* \leq |y|_* \qquad \forall x \in C_A(\lambda)\,.$$

Dans l'espace X_* on est donc dans les conditions du Théorème I de [1] d'où la thèse.

4. Analyticité du semi-groupe

On suppose maintenant que l'opérateur $A : D_A \subset C \to X$ appartient à la classe $H_L^{M,w,\vartheta}(C)$ et est R-dérivable par rapport à $\Sigma_{\vartheta,w}$. On considère alors la condition suivante:

$$(S_2) \quad \begin{cases} \text{pour tout} \quad k \in \mathbf{N}, \{x_1 \cdots x_k\} \subset D_A , \lambda \in \Sigma_{\vartheta,w} \\ \left\| \prod_1^k {}_i R(\lambda , A'[x_i]) \right\| \leq \dfrac{M}{|\lambda - w|^k} . \end{cases}$$

On a:

Théorème. *Soit* $A : D_A \subset C \to X (Ao=o)$ *un opérateur de classe* $H_L^{M,w,\vartheta}(C)$, R-*dérivable par rapport a* $\Sigma_{\vartheta,w}$, *vérifiant la condition* (S_2). *Il existe alors un unique semi-groupe* $\{G(t)\}_{t\in\Sigma_{\vartheta,0}}$ *sur* $\overline{D_A}$ *analytique dans* $\Sigma_{\vartheta,0}$ *tel que*:

$$(4.1) \quad \begin{cases} G(t)\,x = \lim\limits_{n\to\infty} \left[R_c\left(\dfrac{n}{t}, A\right) \dfrac{n}{t} \right]^n x \quad \forall t \in \Sigma_{\vartheta,0} \quad , \quad \forall x \in \overline{D_A} \\ |G(t)|_L \leq M e^{w\,\mathrm{Re}\,t} . \end{cases}$$

Démonstration. Pour chaque $r > 0$ on considère l'ouvert borné $\Sigma_{\vartheta,0} \cap \mathcal{C}_r$ [7] du plan complexe et les « approchants »:

$$(4.2) \qquad G_n(t) = \left[R_c\left(\frac{n}{t}, A\right) \frac{n}{t} \right]^n : C \to C \qquad t \in \Sigma_{\vartheta,0} \cap \mathcal{C}_r \quad , \quad n > |w|\,r .$$

Pour tout $x \in \overline{D_A}$ la fonction $t \to G_n(t)\,x$ est analytique dans $\Sigma_{\vartheta,0} \cap \mathcal{C}_r$ (Lemme 2–2). En ce qui concerne la suite $\{G_n(t)\,x\}_{n>|w|r}$, elle converge pour $t \in (0, r)$, l'opérateur A vérifiant les hypotheses du Théorème 3.1. De plus on a que la suite $\{G_n(t)\,x\}_{n>|w|r}$ est bornée uniformement en n, en fait

$$(4.3) \qquad |G_n(t)|_L \leq \frac{M}{\left(1 - \dfrac{w\,\mathrm{Re}\,t}{n}\right)^n}$$

grâce à la condition (S_2). On conclut donc (Théorème de Vitali) que la suite $\{G_n(t)\,x\}_{n>|w|r}$ converge pour tout $t \in \Sigma_{\vartheta,0} \cap \mathcal{C}_r$ à une fonction $G(t)\,x$ analitique dans $\Sigma_{\vartheta,0} \cap \mathcal{C}_r$. On a enfin la these en considerant la (4.3).

Bibliographie

[1] M. Crandall et T. Liggett, *Generation of semi-groups of non-linear transformations on general Banach spaces*, « Amer. J. Math. », *93*, 265–298 (1971).

[2] G. Da Prato, *Somme d'applications non-linéaires*, « Symposia Mathematica », *7*, 233–268 (1971).

[3] M. Iannelli, *Opérateurs dérivables et semi-groupes non-linéaires non-contractifs*, à paraître.

[4] Y. Kōmura, *Differentiability of nonlinear semigroups*, « J. Math. Soc. Japan », *21* (3) 375–402 (1969).

(7) On définit: $\mathcal{C}_r = \{z \in \mathbf{C}, |z| < r\}$.