Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Grioli

Proprietà variazionali nella meccanica dei continui. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.5, p. 755–760.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_5_755_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Fisica matematica. — *Proprietà variazionali nella meccanica dei continui.* Nota I (*) del Corrisp. GIUSEPPE GRIOLI.

SUMMARY. — A variational property of the stress which is present in a Continuum with finite deformations is established, in two different types. The first type is significant from a heuristic point of view, whilst the second one is directly connected with the basic integration problem of the elastic equilibrium.

Mi propongo di stabilire una proprietà variazionale dello stress valida nel caso di corpi iperelastici con deformazioni finite. Tale proprietà presento in due forme diverse riferendomi una prima volta allo stress attuale, espresso dalla matrice simmetrica X, una seconda allo stresso di Kirchoff, espresso dalla matrice non simmetrica (1) K.

Nel primo caso la proprietà è euristicamente più interessante in quanto si riferisce all'unica matrice di stress fisicamente significativa e ciò ne giustifica la segnalazione, nel secondo invece la proprietà variazionale ha una maggiore potenza analitica in quanto è possibile dare di essa un teorema di inversione che non soltanto rappresenta una traduzione del teorema di esistenza ma addirittura permette di fondare su di essa un metodo di integrazione del difficile problema analitico dell'equilibrio elastico nel caso di deformazioni finite.

Va segnalata la particolarità che le proprietà variazionali di cui sopra in effetti rappresentano un'interpretazione di note proprietà di media valide per qualunque sistema continuo. Si può pertanto presumere la possibilità di estenderle a corpi non elastici.

1. NOTAZIONI E PREMESSE GEOMETRICHE

Si consideri un continuo tridimensionale in due configurazioni $C^{(0)}, C$ di cui diremo la prima configurazione di riferimento, l'altra attuale. Sia $\boldsymbol{u} = (u_r)$ il vettore che caratterizza lo spostamento da $C^{(0)}$ a C.

Si riferiscano le due configurazioni $C^{(0)}$ e C a una medesima terna trirettangola levogira, denotando con y_r le coordinate del generico punto $P^{(0)}$ di $C^{(0)}$ e con x_r quelle del corrispondente P di C, $[u_r \equiv x_r - y_r]$.

La trasformazione da $C^{(0)}$ a C è caratterizzata dalle relazioni (2)

$$x_r \equiv x_r(y_1, y_2, y_3) \tag{1}$$

(*) Presentata nella seduta del 12 maggio 1973.

(1) Per una proprietà variazionale espressa nella matrice lagrangiana Y vedi [16]. Proprietà variazionali sullo stress sono studiate nel caso dell'elastostatica lineare in [3], [8], [13], [20] e in [2], [5], [6].

(2) Naturalmente, la trasformazione da $C^{(0)}$ a C può dipendere dal tempo t ma i problemi qui considerati sono generalmente di Statica e, comunque, è inessenziale per il seguito mettere in evidenza la dipendenza esplicita dal parametro t.

che supporrò dotate di tutte le proprietà di continuità, e regolarità necessarie e sufficienti per le loro complete invertibilità [biunivocità della corrispondenza].

In particolare sarà

$$D = \mathrm{Det} \| x_{r,s} \| > 0 , \tag{2}$$

ove con la virgola si denota – come nel seguito per ogni funzione – la derivazione rispetto alle y_s.

Saranno utili alcuni richiami e precisazioni. È ben noto che la matrice a delle $x_{r,s}$, è esprimibile in due modi significativi nella Meccanica dei continui:

$$a = \rho \mathrm{d} = \mathrm{d}' \rho , \qquad \mathrm{d}' = \rho \mathrm{d} \rho^{-1} , \tag{3}$$

ove ρ è una matrice di rotazione [la rotazione locale] e d e d′ denotano due matrici simmetriche di ben noto significato.

Denoterò con il soprassegno la matrice coniugata di una data matrice [risulta $\bar{\rho} = \rho^{-1}$; $\mathrm{Det}\, \rho = 1$]. Se invece ci si riferisce allo spostamento inverso che trasforma C in $C^{(0)}$, caratterizzato dal vettore $-\boldsymbol{u}$, va considerata la matrice a^{-1} i cui elementi sono le $\partial y_r / \partial x_s$ e per la quale vale la decomposizione analoga a quella espressa da (3).

$$a^{-1} = \rho^{(i)}\, \mathrm{d}^{(i)}. \tag{4}$$

Risulta

$$\mathrm{dd} = \bar{a} a \quad ; \quad \mathrm{d}'\mathrm{d}' = a \bar{a} \quad ; \quad \mathrm{d}^{(i)}\, \mathrm{d}^{(i)} = \overline{a^{-1}}\, a^{-1} \tag{5}$$

da cui segue [vedi (4)]

$$\mathrm{d}^{(i)} = \mathrm{d}'^{-1} \quad ; \quad \rho^{(i)} = \rho^{-1} = \bar{\rho} . \tag{6}$$

Denotando con ε, $\varepsilon^{(i)}$, ε' le matrici che denotano le caratteristiche di deformazione relative allo spostamento $\boldsymbol{u}$, a quello inverso, $-\boldsymbol{u}$, e alla dilatazione d′ risulta

$$1 + 2\,\varepsilon = \mathrm{dd} \quad ; \quad 1 + 2\,\varepsilon^{(i)} = \mathrm{d}^{(i)}\, \mathrm{d}^{(i)} \quad ; \quad 1 + 2\,\varepsilon' = \mathrm{d}'\mathrm{d}' \tag{7}$$

e pertanto (3) [vedi anche (3)]

$$1 + 2\,\varepsilon^{(i)} = (1 + 2\,\varepsilon')^{-1} ; \qquad \varepsilon' = \rho \varepsilon \bar{\rho} . \tag{8}$$

Sia W una funzione delle ε_{rs} : $W \equiv W(\varepsilon)$. La corrispondenza biunivoca tra ε e ε' permette di esprimere la W mediante le ε'_{rs}. Sia W′ ciò che diviene la W eliminando le ε_{rs}, in base alla (8) e si denotino con $W'_{/\varepsilon'}$, $W_{/\varepsilon}$ le matrici simmetriche che hanno per componenti le derivate parziali prime delle W′ e W rispettivamente rispetto alle ε'_{rs}, ε_{rs}. Da (8,2) segue subito

$$W_{/\varepsilon} = \bar{\rho}\, W'_{/\varepsilon'}\, \rho \rightleftarrows W'_{/\varepsilon'} = \rho W_{/\varepsilon}\, \bar{\rho} \tag{9}$$

(3) Vedi, ad esempio [1].

e conseguentemente

$$(10) \qquad \frac{\partial^2 W'}{\partial \varepsilon'_{rs}\, \partial \varepsilon'_{\nu\mu}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{pq}\, \partial \varepsilon_{lm}}\, \rho_{rp}\, \rho_{sq}\, \rho_{\nu l}\, \rho_{\mu m}\,.$$

Posto $\xi = \bar{\rho} z \rho$, da (10) segue

$$(11) \qquad \frac{\partial^2 W'}{\partial \varepsilon'_{rs}\, \partial \varepsilon'_{\nu\mu}}\, z_{rs}\, z_{\nu\mu} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{rs}\, \partial \varepsilon_{\nu\mu}}\, \xi_{rs}\, \xi_{\nu\mu}\,,$$

da cui si riconosce che in ogni configurazione in cui le derivate seconde della W rispetto alle ε_{rs}, soddisfano alla condizione di essere i coefficienti di una forma quadratica definita positiva, la medesima proprietà vale per le derivate seconde della W′ rispetto alle ε'_{rs}.

Supporrò che ciò avvenga in $C^{(0)}$.

In particolare da (11), per $z = \varepsilon'$, si ha

$$(12) \qquad \frac{\partial^2 W'}{\partial \varepsilon'_{rs}\, \partial \varepsilon'_{pq}}\, \varepsilon'_{rs}\, \varepsilon'_{pq} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{rs}\, \partial \varepsilon_{pq}}\, \varepsilon_{rs}\, \varepsilon_{pq}\,.$$

Le constatate proprietà della $W'(\varepsilon')$ assicurano l'invertibilità delle relazioni matriciali

$$(13) \qquad DL = - W'_{/\varepsilon'}\,,$$

non solo in $C^{(0)}$ ma per continuità almeno in un suo intorno.

Da (13) segue dunque [4]

$$(14) \qquad \varepsilon' = \gamma(L)\,.$$

Vale la pena di osservare che se si denota con $W^{(x)}(x_{r,s})$ ciò che diviene la $W(\varepsilon)$ quando si sostituiscono le ε_{rs} con le loro ben note espressioni nelle $x_{r,s}$, e si indica con $W^{(x)}_{/x}$, la matrice delle derivate della $W^{(x)}$ rispetto alle $x_{r,s}$, si ha

$$(15) \qquad W^{(x)}_{/x} = a W_{/\varepsilon}$$

da cui, denotando con δ_{rs} il simbolo di Kronker, segue

$$(16) \qquad \frac{\partial^2 W^{(x)}}{\partial x_{r,s}\, \partial x_{p,q}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{sl}\, \partial \varepsilon_{qt}}\, x_{r,l}\, x_{p,t} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{sq}}\, \delta_{rp}\,.$$

Si può constatare che il determinante delle derivate seconde della $W^{(x)}$ rispetto alle $x_{r,s}$ non è identicamente nullo [mentre ciò accade in $C^{(0)}$, se esente da stress].

Posto

$$(17) \qquad K = - W^{(x)}_{/x}\,,$$

(4) Naturalmente, si penserà D espresso mediante ε oppure ε'; risulta, anzi, $D(\varepsilon) \equiv D(\varepsilon')$ [vedi (8)].

le (17) sono pertanto, in generale, invertibili, e si può porre

$$a = \alpha(\mathrm{K}) . \tag{18}$$

Si ponga

$$\mathrm{N}(\mathrm{L}) = -\mathrm{W}'[\gamma(\mathrm{L})] - \gamma_{rs}^{(\mathrm{L})}\mathrm{L}_{rs}, \tag{19}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{K}) = -\mathrm{W}^{(x)}[\alpha(\mathrm{K})] - \alpha_{rs}(\mathrm{K})\,\mathrm{K}_{rs} . \tag{20}$$

Da (14), (17), (19), (20) segue facilmente

$$\varepsilon'_{rs} = -\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{L}_{rs}} \quad , \quad x_{rs} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{K}_{rs}} , \tag{21}$$

dalle quali si deduce

$$\frac{\partial^2 \mathrm{N}}{\partial \mathrm{L}_{rs}\,\partial \mathrm{L}_{pq}} = -\frac{\partial \varepsilon'_{rs}}{\partial \mathrm{L}_{pq}} \quad , \quad \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{K}_{rs}\,\partial \mathrm{K}_{pq}} = -\frac{\partial x_{rs}}{\partial \mathrm{K}_{pq}} . \tag{22}$$

Da (13), (17), (22) si ricava

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{rs}\,\delta_{sq} &= \frac{\partial^2 \mathrm{W}^s}{\partial \varepsilon'_{rs}\,\partial \varepsilon'_{tl}}\,\frac{\partial^2 \mathrm{N}}{\partial \mathrm{L}_{tl}\,\partial \mathrm{L}_{pq}} , \\ \delta_{rs}\,\delta_{sq} &= \frac{\partial^2 \mathrm{W}^{(x)}}{\partial x_{rs}\,\partial x_{tl}}\,\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \gamma_{tl}\,\partial \gamma_{pq}} , \end{aligned} \right. \tag{23}$$

dalle quali si riconosce che le funzioni $\mathrm{N}(\mathrm{L})$, $\mathrm{V}(\mathrm{K})$ godono almeno in un intorno di $\mathrm{C}^{(0)}$ di proprietà analoghe a quelle delle funzioni $\mathrm{W}'(\varepsilon)$, $\mathrm{W}^{(x)}_{(x)}$.

Siano X, K, Y le matrici dello stress attuale [di Cauchy], misto e lagrangiano, simmetriche la prima e la terza. Identificando $\mathrm{W}(\varepsilon)$ con l'energia potenziale, sono ben note le relazioni

$$\mathrm{Y} = -\mathrm{W}_{/\varepsilon} \quad , \quad \mathrm{K} = a\mathrm{Y} \quad , \quad \mathrm{X} = \frac{\mathrm{K}\bar{a}}{\mathrm{D}} = \frac{a\mathrm{Y}\bar{a}}{\mathrm{D}} , \tag{24}$$

valide nel caso iperelastico.

Da (19), (13), (24) segue

$$\mathrm{X} = -\frac{a\mathrm{W}_{/\varepsilon}\,\bar{a}}{\mathrm{D}} = -\frac{\mathrm{d}'\rho\mathrm{W}_{/\varepsilon}\,\bar{\rho}\,\mathrm{d}'}{\mathrm{D}} = -\frac{\mathrm{d}'\,\mathrm{W}'_{/\varepsilon'}\,\mathrm{d}'}{\mathrm{D}} = \mathrm{d}'\,\mathrm{L}\mathrm{d}'. \tag{25}$$

Si denoti con $\mathrm{N}(\mathrm{X})$ ciò che diviene la $\mathrm{N}(\mathrm{L})$ quando si tenga conto di (25). Si ha

$$\frac{\partial^2 \mathrm{N}(\mathrm{L})}{\partial \mathrm{L}_{pq}\,\partial \mathrm{L}_{rs}}\,\mathrm{L}_{pq}\,\mathrm{L}_{rs} = \frac{\partial^2 \mathrm{N}^{(x)}}{\partial \mathrm{X}_{pq}\,\partial \mathrm{X}_{rs}}\,\mathrm{X}_{pq}\,\mathrm{X}_{rs} , \tag{26}$$

di cui si riconosce che la $\mathrm{N}(\mathrm{X})$ gode di proprietà analoghe a quelle della $\mathrm{N}(\mathrm{L})$. In particolare, la forma quadratica a secondo membro di (26) è definita positiva in ogni punto in cui lo è quella a primo membro.

Vale la pena di osservare che nel caso di sistemi isotropi, le d e Y hanno le medesime direzioni unite e così pure le d', L le cui direzioni unite si ottengono rispettivamente da quelle di d e Y mediante la rotazione caratterizzata dalla ρ [vedi (3), (8), (9), (13), tenendo presente che è $L = \rho Y \bar{\rho}$].

Inoltre $W(\varepsilon)$ e $W'(\varepsilon')$ dipendono dalle ε, ε' solo per tramite degli invarianti principali. Di conseguenza da (25) in tal caso si deduce (5)

$$X = d' d' L = (1 + 2\varepsilon') L(\varepsilon') = (1 + 2\varepsilon^{(i)})^{-1} L [\varepsilon'(\varepsilon^{(i)})], \tag{27}$$

da cui si vede che la X è esprimibile mediante la ε' oppure, – come è ben noto [1] – mediante la $\varepsilon^{(i)}$, data la biunivocità della corrispondenza tra le ε', $\varepsilon^{(i)}$ [vedi (8)].

In definitiva si conclude che la N(L) espressa da (19) si può far dipendere dalla X anziché dalla L in base a (25), ma mentre in generale la N viene a dipendere oltre che dalla X anche da ρ e $d^{(i)}$, nel caso particolare dei sistemi isotropi la N, tenuto conto di (27) e del fatto che ora W' dipende solo dalla $\varepsilon^{(i)}$ [per tramite dei suoi invarianti principali] ma non da ρ, diviene una funzione N(X) della X con coefficienti dipendenti da $\varepsilon^{(i)}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memoria I, « Annali di matematica pura e applicata », *22* (1943).

[2] E. REISSNER, *On a variational theorem in elasticity*, « J. of. Math. a Phy. », *25*, 90–95 (1950).

[3] G. GRIOLI, *Validità del teorema di Menabrea e integrazione del problema dell'elastostatica in casi non isotermi*, « Rend. Sem. Mat. Univer. di Padova », *21*, 202–208 (1952).

[4] G. GRIOLI, *Proprietà di media e integrazione del problema dell'elastostatica isoterma*, « Annali di matematica pura e applicata », ser. IV, *33* (1952).

[5] E. REISSNER, *On a variational theorem for finite elastic deformations*, « J. Math. Phy. », *32*, 129 (1953).

[6] T. MANACORDA, *Sopra un principio variazionale di E. Reissner per la statica dei mezzi continui*, « Boll. Univ. Mat. Italia », *9* (3), 154–159 (1954).

[7] A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memoria IV, « Annali di matematica pura e applicata », *51* (1960).

[8] G. CARICATO, *Sul teorema di Menabrea*, « Rend. di Matematica », *19*, 318–332 (1960).

[9] G. GRIOLI, *Mathematical Theory of Elastic Equilibrium* (*Recent Results*), Springer-Verlag (1962).

[10] G. FICHERA, *Sul problema elastostatico di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *34* (1963).

[11] G. GRIOLI, *Problemi di integrazione nella teoria dell'equilibrio elastico*, Corso C.I.M.E., Bressanone 1963.

[12] G. FICHERA, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, «Mem. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *7* (5) (1964).

[13] G. GRIOLI, *Problemi di integrazione e formulazione integrale del problema fondamentale dell'elastostatica*, Simposio internazionale sulle applicazioni dell'Analisi alla Fisica Matematica, Cagliari–Sassari, Ed. Cremonese (1964).

(5) Il legame tra le matrici X, L corrisponde in effetti all'insieme di (1,12), (2,2) in [17]. Proprietà varie riguardanti lo stress sono espresse anche in [14], [18].

[14] D. GALLETTO, *Sulla condizione d'isotropia per i sistemi continui a trasformazioni reversibili*, « Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova » (1967).

[15] T. VALENT, *Qualche proprietà dei sistemi di vettori applicati. Possibili applicazioni alla teoria matematica dell'elasticità*. « Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova », *34* (1967).

[16] G. GRIOLI, *Il teorema di Menabrea alla luce delle deformazioni finite*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *44* (1) (1968).

[17] D. GALLETTO, *Sulla potenza dello stress e sull'isotropia dei materiali iperelastici*, « Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova », *40*, 227 (1968).

[18] D. GALLETTO, *Sui materiali iperelastici anisotropi*, « Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova », *40*, 237 (1968).

[19] T. VALENT, *Qualche proprietà e applicazione di sistemi di vettori definiti su una superficie*, « Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova », *41* (1968).

[20] G. CARICATO, *Il teorema di Menabrea per trasformazioni non isoterme di un corpo elastico vincolato, anisotropo e non omogeneo, con stress iniziale*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *44* (2–3) (1968).