
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIOVANNA BOSCHI PETTINI

**Sull'integrazione approssimata di alcune equazioni
della Meccanica**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 55 (1973), n.1-2, p. 72-78.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_1-2_72_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Sull'integrazione approssimata di alcune equazioni della Meccanica*^(*). Nota^(**) di GIOVANNA BOSCHI PETTINI, presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — The author considers the differential equation:

$$(1) \quad \ddot{q} + \omega^2(\varepsilon t) q = f(t)$$

where ε is a small number. He finds an approximate solution of (1) with an error $O(\varepsilon^2)$, when $f(t) = 0$, and with an error $O(\varepsilon)$ when $f(t) \neq 0$. He exposes some applications of his results to a problem of mechanics.

1. — Lo studio dei piccoli moti intorno ad una posizione di equilibrio stabile in un sistema meccanico a un grado di libertà, con vincoli lentamente variabili col tempo, conduce ad un'equazione del tipo:

$$(1) \quad \ddot{Q} + \omega^2 Q = f(t)$$

dove $\omega^2 = \omega^2(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$, ε numero positivo molto piccolo.

Comunque la (1) si incontra in varie questioni applicative, per esempio nelle oscillazioni forzate di un sistema meccanico o elettrico con caratteristiche lentamente variabili col tempo.

Ora, se $f(t) = 0$, è ben nota la soluzione di (1) con approssimazione dell'ordine di ε , in un intervallo di tempo $[0, L/\varepsilon]$, $L > 0$ e del resto arbitrario, soluzione che in sostanza risale a Liouville.

Però, per quanto mi risulta, non è stata ottenuta una soluzione approssimata di (1) con $f(t) \neq 0$ (che supporremo come ω^2 continua e limitata nell'intervallo $[0, \infty[$, nel medesimo intervallo $[0, L/\varepsilon]$, il che può aversi se Q e $\dot{Q}$ sono note, per $f(t) = 0$, con approssimazione dell'ordine di ε^2).

In questa Nota ho ricavato, anzitutto, con approssimazione dell'ordine di ε^2 , una soluzione della (1) con $f(t) = 0$, soluzione ovviamente di qualche interesse.

La questione è stata trattata anche da altri Autori, ma non mi risulta che abbiano ottenuto, almeno esplicitamente, la mia soluzione che si presenta relativamente semplice. Comunque ritengo che il procedimento da me seguito, che in sostanza si avvale della teoria degli invarianti adiabatici, possa avere carattere di novità; inoltre tale metodo permette abbastanza facilmente di calcolare un valore maggiorante dell'errore commesso sostituendo la soluzione approssimata alla soluzione esatta di (1).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1973.

Col metodo della variazione delle costanti arbitrarie ho poi ricavato l'espressione approssimata della soluzione di (1) nell'ipotesi $f(t) \neq 0$, con un errore dell'ordine di ε .

Ho infine ricavato l'equazione a cui ho accennato in principio, e che, in base ai risultati ottenuti, ho risolto in modo completo con una approssimazione dell'ordine di ε^2 .

2. Consideriamo, dunque, la seguente equazione:

$$\ddot{Q} + \omega^2 Q = f(t)$$

dove, come già si è detto, $\omega^2 = \omega^2(\tau) = \omega^2(\varepsilon t)$ e, se $\omega > 0$, $\dot{\omega} = O(\varepsilon)$, $\ddot{\omega} = O(\varepsilon^2)$, ecc.

Se $f(t) = 0$, mediante una ben nota trasformazione canonica ⁽¹⁾ a nuove variabili J e θ :

$$(2) \quad Q = \sqrt{\frac{2J}{\omega}} \sin \theta, \quad \dot{Q} = \sqrt{2J\omega} \cos \theta$$

la (1) si riduce al sistema:

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{J} = -J \frac{\dot{\omega}}{\omega} \cos 2\theta \\ \dot{\theta} = \omega + \frac{1}{2} \frac{\dot{\omega}}{\omega} \sin 2\theta. \end{cases}$$

Consideriamo la seconda equazione di (3) e cerchiamo di risolverla nell'intervallo $[0, L/\varepsilon]$ con un errore dell'ordine di ε^2 .

Si ha intanto la relazione:

$$-\frac{1}{4} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \cos 2\theta \right) = \frac{1}{2} \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \sin 2\theta \left(\omega + \frac{1}{2} \frac{\dot{\omega}}{\omega} \sin 2\theta \right) - \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \right) \cos 2\theta$$

da cui segue:

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{\omega}}{\omega} \sin 2\theta = -\frac{1}{4} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \cos 2\theta \right) - \frac{1}{4} \frac{\dot{\omega}^2}{\omega^3} \sin^2 2\theta + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \right) \cos 2\theta$$

quindi, ricordando che $\sin^2 2\theta = \frac{1 - \cos 4\theta}{2}$, si ha, sostituendo nella seconda di (3) e integrando da zero a t , dove $t \in [0, L/\varepsilon]$, $L > 0$ e del resto arbitrario, (detto θ_0 il valore iniziale di θ , cioè per $t = 0$):

$$(4) \quad \begin{aligned} \theta = \theta_0 + \int_0^t \omega dt - \frac{1}{4} \left[\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \cos 2\theta \right]_0^t + \\ + \frac{1}{4} \int_0^t \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \right) \cos 2\theta dt - \frac{1}{8} \int_0^t \frac{\dot{\omega}^2}{\omega^3} dt + \frac{1}{8} \int_0^t \frac{\dot{\omega}^2}{\omega^3} \cos 4\theta dt. \end{aligned}$$

(1) Cfr. per esempio [1].

Poiché

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = O(\varepsilon) \quad , \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \right) = O(\varepsilon^2) \quad , \quad \frac{\dot{\omega}^2}{\omega^3} = O(\varepsilon^2)$$

si ha intanto, posto

$$\theta' = \theta_0 + \int_0^t \omega \, dt$$

$$(5) \quad \theta = \theta' + O(\varepsilon).$$

Per ottenere θ con approssimazione di $O(\varepsilon^2)$, notiamo che:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \right) \frac{1}{\omega} \sin 2\theta \right] &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \right) \frac{1}{\omega} \cos 2\theta \left(\omega + \frac{1}{2} \frac{\dot{\omega}}{\omega} \sin 2\theta \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \right) \frac{1}{\omega} \right] \sin 2\theta \end{aligned}$$

da cui, essendo, come subito si verifica,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \right) \frac{1}{\omega} \right] = O(\varepsilon^3),$$

si ha:

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \right) \cos 2\theta = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \right) \frac{1}{\omega} \sin 2\theta \right] + O(\varepsilon^3).$$

In modo analogo si può scrivere:

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}^2}{\omega^4} \sin 4\theta \right) = \frac{\dot{\omega}^2}{\omega^4} \cos 4\theta \left(\omega + \frac{\dot{\omega}}{2\omega} \sin 2\theta \right) + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}^2}{\omega^4} \right) \sin 4\theta$$

cioè, essendo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}^2}{\omega^4} \right) = O(\varepsilon^3):$$

$$(7) \quad \frac{\dot{\omega}^2}{\omega^3} \cos 4\theta = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}^2}{\omega^4} \sin 4\theta \right) + O(\varepsilon^3).$$

Ora si ha, per la (6), e tenendo conto che

$$\int_0^t O(\varepsilon^3) \, dt = O(\varepsilon^2):$$

$$(8) \quad \int_0^t \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \right) \cos 2\theta \, dt = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \right) \frac{1}{\omega} \sin 2\theta \right]_0^t + \int_0^t O(\varepsilon^3) \, dt = O(\varepsilon^2).$$

e analogamente per la (7) si ha:

$$(9) \quad \int_0^t \frac{\dot{\omega}^2}{\omega^3} \cos 4\theta \, dt = O(\varepsilon^2).$$

Si noti poi che (2):

$$\begin{aligned} \left[\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \cos 2\theta \right]_0^t &= \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \cos 2\theta(t) - \frac{\dot{\omega}_0}{\omega_0^2} \cos 2\theta_0 = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \cos 2\theta' + \\ &+ \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} (\cos 2\theta - \cos 2\theta') - \frac{\dot{\omega}_0}{\omega_0^2} \cos 2\theta_0 = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \cos 2\theta' - \frac{\dot{\omega}_0}{\omega_0^2} \cos 2\theta_0 + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Si ha così, per la (4),

$$(10) \quad \theta = \theta' + \frac{1}{4} \frac{\dot{\omega}_0}{\omega_0^2} \cos 2\theta_0 - \frac{1}{4} \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \cos 2\theta' - \frac{1}{8} \int_0^t \frac{\dot{\omega}^2}{\omega^3} dt + O(\varepsilon^2),$$

che esprime θ con un errore dell'ordine di ε^2 .

Passiamo ora al calcolo di J nell'intervallo $[0, L/\varepsilon]$, sempre con un errore $O(\varepsilon^2)$. Questo calcolo è già stato fatto, in sostanza, nella Nota [2], comunque per comodità, lo riportiamo.

Poiché, al solito:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \sin 2\theta \right) &= \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \cos 2\theta \left(\omega + \frac{1}{2} \frac{\dot{\omega}}{\omega} \sin 2\theta \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \right) \sin 2\theta = \\ &= \frac{\dot{\omega}}{\omega} \cos 2\theta - \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \right) \frac{1}{\omega} \cos 2\theta \right] + \frac{\dot{\omega}^2}{4\omega^3} \sin 4\theta + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

ricavando da questa equazione $\frac{\dot{\omega}}{\omega} \cos 2\theta$ e sostituendo tale espressione nella prima di (3), si ha:

$$\frac{\dot{J}}{J} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \sin 2\theta \right) - \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \right) \frac{1}{\omega} \cos 2\theta \right] + \frac{\dot{\omega}^2}{4\omega^3} \sin 4\theta + O(\varepsilon^3).$$

Integrando fra zero e t , $t \in [0, L/\varepsilon]$, risulta (si tenga presente la (9) valida anche scambiando coseno con seno, come subito si verifica):

$$\lg \frac{J}{J_0} = - \left[\frac{\dot{\omega}}{2\omega^2} \sin 2\theta \right]_0^t + O(\varepsilon^2)$$

dove J_0 è il valore di J per $t = 0$.

Ponendo θ' in luogo di θ si commette un errore dell'ordine di ε^2 ; si ha pertanto, nell'intervallo $[0, L/\varepsilon]$:

$$(11) \quad J = J_0 \exp \left(- \frac{\dot{\omega}}{2\omega^2} \sin 2\theta' + \frac{\dot{\omega}_0}{2\omega_0^2} \sin 2\theta_0 \right) + O(\varepsilon^2).$$

Le (10) e (11) esprimono dunque, ricordando il valore di θ' , i valori di J e θ con un errore dell'ordine di ε^2 . Per le (2) si ha perciò la cercata soluzione di (1) con $f(t) = 0$ con un errore dell'ordine di ε^2 e nell'intervallo $[0, L/\varepsilon]$.

(2) Si osservi che, tenendo presente anche (5), $|\cos 2\theta - \cos 2\theta'| \leq 2|\theta - \theta'| = O(\varepsilon)$ quindi, conforme al testo: $\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} (\cos 2\theta - \cos 2\theta') = O(\varepsilon^2)$.

Ovviamente, trascurando nei secondi membri di (10) e (11) i termini in ε , cioè ponendo $\dot{\omega} = 0$, si ha la nota soluzione del sistema (3) e quindi della (1) (con $f(t) = 0$) con un errore dell'ordine di ε .

Notiamo che, cambiando θ in $\theta + \pi/2$, le (2) diventano:

$$(12) \quad Q = \sqrt{\frac{2J}{\omega}} \cos \theta \quad , \quad \dot{Q} = -\sqrt{2J\omega} \sin \theta$$

e le (3) restano invariate salvo lo scambio di $\dot{\omega}$ con $-\dot{\omega}$. Valgono pertanto ancora (10) e (11), però con $-\dot{\omega}$ in luogo di $\dot{\omega}$.

3. Consideriamo ora l'equazione non omogenea:

$$(13) \quad \ddot{Q} + \omega^2 Q = f(t)$$

e, per risolverla, applichiamo il metodo della variazione delle costanti arbitrarie.

Consideriamo le soluzioni dell'omogenea ad essa associata, che indichiamo con Q_1 e Q_2 , cioè siano

$$(14) \quad Q_1 = \sqrt{\frac{2J_1}{\omega}} \sin \theta_1 \quad , \quad \dot{Q}_1 = \sqrt{2J_1\omega} \cos \theta_1$$

$$(15) \quad Q_2 = \sqrt{\frac{2J_2}{\omega}} \cos \theta_2 \quad , \quad \dot{Q}_2 = -\sqrt{2J_2\omega} \sin \theta_2$$

dove J_1, θ_1 sono soluzioni di (3), J_2, θ_2 soluzioni di (3) con $-\dot{\omega}$ in luogo di $\dot{\omega}$, corrispondenti alle condizioni iniziali

$$(16) \quad J_{10} = J_{20} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \theta_{10} = \theta_{20} = 0.$$

Poniamo, per il citato metodo:

$$(17) \quad Q = C_1 Q_1 + C_2 Q_2 \quad , \quad \dot{Q} = C_1 \dot{Q}_1 + C_2 \dot{Q}_2.$$

Allora, tenendo conto che il Wronskiano fra Q_1 e Q_2 vale -1 , si ha, con passaggi ben noti:

$$(18) \quad C_1 = \int_0^t f(t) Q_2 dt + C_{10} \quad ; \quad C_2 = -\int_0^t f(t) Q_1 dt + C_{20}.$$

Sostituendo nelle (18) a Q_1 e Q_2 i loro valori approssimati ottenuti ponendo in luogo di J_1 e J_2, θ_1 e θ_2 le espressioni (10) e (11) (con $-\dot{\omega}$ in luogo di $\dot{\omega}$ per J_2 e θ_2) si può ottenere C_1 e C_2 a meno di un errore dell'ordine di ε .

Quindi le (17) esprimono la cercata soluzione della (13) con un errore dell'ordine di ε , nell'intervallo $[0, L/\varepsilon]$.

4. Come applicazione dei risultati ottenuti, si abbia un sistema reonomo a un grado di libertà, in cui i vincoli variano molto lentamente al trascorrere del tempo.

Cioè, se q è la coordinata lagrangiana del sistema, ogni suo punto P , sia tale che $P_s = P_s(q, \tau)$, $\tau = \varepsilon t$, $\varepsilon > 0$ molto piccolo.

Inoltre supporremo le forze derivanti da un potenziale $V(q, \tau)$ e che, bloccati i vincoli all'istante $\bar{t}$ ($\bar{t}$ istante generico), per $t \geq \bar{t}$ la posizione corrispondente a $q = 0$ sia di equilibrio stabile con potenziale $V(0, \varepsilon \bar{t})$ e

$$\left(\frac{\partial^2 V(q, \varepsilon \bar{t})}{\partial q^2} \right)_{q=0} > 0.$$

Inoltre ammetteremo che, durante il moto, q e $\dot{q}$ restino abbastanza piccole in modo da poter trascurare prodotti e potenze di q e $\dot{q}$ superiori alla seconda.

In queste ipotesi, come si è visto [3], la Lagrangiana assume l'espressione (con $a_{11}(\tau) > 0$):

$$(19) \quad \begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} T_{11}(\tau) \dot{q}^2 + \varepsilon [\varphi_1(\tau) \dot{q} + \varphi_{11}(\tau) q \dot{q}] + \\ & + \varepsilon^2 [h_0(\tau) + h_1(\tau) q + h_{11}(\tau) q^2] - \frac{1}{2} a_{11}(\tau) q^2. \end{aligned}$$

e quindi l'equazione di Lagrange è:

$$(20) \quad \frac{d}{dt} (T_{11} \dot{q}) + \varepsilon^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \tau} - 2 h_{11} \right) q + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} - h_1 \right] + a_{11} q = 0.$$

Posto

$$(21) \quad Q = \sqrt{T_{11}} q$$

si ha, con semplici calcoli, la seguente espressione per la (20):

$$(22) \quad \begin{aligned} \ddot{Q} - \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{T_{11}}} \frac{\partial^2 \sqrt{T_{11}}}{\partial \tau^2} Q + \frac{\varepsilon^2}{T_{11}} \left(\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \tau} - 2 h_{11} \right) Q + \\ + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{T_{11}}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} - \frac{\varepsilon^2 h_1}{\sqrt{T_{11}}} + \frac{a_{11}}{T_{11}} Q = 0. \end{aligned}$$

Cioè, posto

$$(23) \quad \begin{aligned} \psi(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{T_{11}}} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} - h_1 \right), \\ \omega^2 &= \frac{a_{11}}{T_{11}} + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{T_{11}}} \left[\frac{1}{\sqrt{T_{11}}} \left(\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \tau} - 2 h_{11} \right) - \frac{\partial^2 \sqrt{T_{11}}}{\partial \tau^2} \right] \end{aligned}$$

si ha l'equazione:

$$(24) \quad \ddot{Q} + \omega^2 Q = -\varepsilon^2 \psi(\tau)$$

in cui, essendo ε^2 molto piccolo e $a_{11} > 0$, si può supporre $\omega^2 > 0$.

Si noti che, in questo caso, nel calcolo di C_1 e C_2 , si possono porre i valori di Q_1 e Q_2 calcolati con un'approssimazione dell'ordine di ε .

Infatti, in questo caso, si può scrivere:

$$\begin{aligned} J_1 &= J_{10} + O(\varepsilon) \quad , \quad J_2 = J_{20} + O(\varepsilon) \\ \theta_1 &= \theta' + O(\varepsilon) \quad , \quad \theta_2 = \theta' + O(\varepsilon) \quad , \quad \theta' = \int_0^t \omega \, dt. \end{aligned}$$

Quindi:

$$Q_1 = \frac{1}{V\omega} \sin \theta' + O(\varepsilon) \quad , \quad Q_2 = \frac{1}{V\omega} \cos \theta' + O(\varepsilon) .$$

Perciò per (17) si ha:

$$(25) \quad C_1 = C_{10} - \varepsilon^2 \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{V\omega} \cos \theta' dt + O(\varepsilon^2)$$

$$(26) \quad C_2 = C_{20} + \varepsilon^2 \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{V\omega} \sin \theta' dt + O(\varepsilon^2)$$

e le (17) risolvono completamente il nostro problema con un errore dell'ordine di ε^2 nell'intervallo $[0, L/\varepsilon]$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] D. GRAFFI, *Gli invarianti adiabatici come metodo di integrazione approssimata di equazioni differenziali*, « Rendiconti Lincei », 15 (6), 657 (1932); D. GRAFFI, *Sopra alcune applicazioni degli invarianti adiabatici*, « Annali di Mat. Pura e Applicata », 15 (4), 87-128 (1936-1937).
- [2] G. PETTINI, *Sull'invariante adiabatico del pendolo di Lorentz*, « Atti Accademia delle Scienze di Bologna », 7 (12), 180-191 (1969-1970).
- [3] G. BOSCHI PETTINI, *Integrazione di alcune equazioni della Meccanica mediante gli invarianti adiabatici*, « Bollettino U.M.I. », 5 (4), 301-314 (1972).