
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ELISEO RANZI, MARIO DENTE, SAURO PIERUCCI,
GIUSEPPE BIARDI

**Gli impianti chimici come sistema: problemi di
decomposizione logica. Nota II: Algoritmo per la
ricerca di tutti gli insiemi minimi dominanti**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 55 (1973), n.1-2, p.
89-106.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_1-2_89_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_1-2_89_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Chimica. — *Gli impianti chimici come sistema: problemi di decomposizione logica.* Nota II: *Algoritmo per la ricerca di tutti gli insiemi minimi dominanti* (*). Nota (**) di ELISEO RANZI, MARIO DENTE, SAURO PIERUCCI e GIUSEPPE BIARDI, presentata dal Socio G. NATTA.

SUMMARY. — In this paper the algorithm to search a minimum set of tearing variables in a directed graph has been improved and generalized in such a way as to produce the totality of covering sets.

The presented algorithm, which is based on the relation existing between the graph on study and a system of formal equation, has been properly divided into several operating parts to find out in the earliest phases and with short computation times, a large number of minimum covering sets.

A number of examples are added, one of them dealing with an industrial chemical plant, in order to have a concrete insight of the adopted algorithm and operating procedure.

INTRODUZIONE

In una precedente Nota [1] degli stessi Autori è stato considerato il problema della decomposizione logica, tipico della analisi dei sistemi, in particolare applicata agli Impianti Chimici.

Se si rappresenta il sistema con tutti i flussi materiali, energetici e informativi, che interconnettono i sottosistemi suoi componenti mediante un grafo direzionato a flussi multipli, dopo la fase di partizione in cui si evidenziano i cicli massimi, acquista rilevante importanza la individuazione dei minimi insiemi dominanti di ogni ciclo massimo. L'insieme minimo dominante (I.M.D.) è quell'insieme costituito dal minimo numero di flussi semplici (o, più in generale, dall'insieme di flussi multipli di peso complessivo minimo) che occorre tagliare in un ciclo massimo per renderne la struttura completamente aciclica (cioè ad albero). Nella Nota citata è stato presentato un algoritmo in grado di determinare, per un generico ciclo massimo, un singolo I.M.D. In realtà ogni ciclo massimo può possedere più I.M.D., caratterizzati ovviamente dallo stesso numero di flussi semplici (ovvero dallo stesso peso complessivo).

In questa Nota II viene esposto un procedimento per la determinazione della totalità degli I.M.D. di un ciclo massimo.

La opportunità di disporre di tutti gli I.M.D. può essere compresa riflettendo alla successiva utilizzazione di questa informazione, ad esempio per

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano nell'ambito della ricerca: «L'impianto Chimico come Sistema». Si ringrazia il Centro Lincoo Interdisciplinare di Scienze Matematiche e loro applicazioni per il contributo finanziario concesso.

(**) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1973.

la fase di risoluzione numerica seguente alla decomposizione logica. È indubbio infatti che, in generale, il tempo di calcolo per la risoluzione numerica dipende non solamente dal numero di variabili di tentativo assunte ma anche dalla loro natura così che la scelta di un particolare I.M.D. come insieme da adottare per le variabili di tentativo (su cui ottenere la convergenza) può influenzare decisamente il tempo di convergenza.

Il procedimento qui sviluppato per ottenere la totalità degli I.M.D. nella maggior parte dei casi richiede un relativamente basso impegno di memoria di un calcolatore elettronico e inoltre un basso tempo di calcolo, in confronto con altri metodi proposti in precedenza [2-6].

Questo metodo, che utilizza anche l'algoritmo precedente [1] come parte essenziale, è strutturato in diverse fasi sequenziali in modo da ottenere nelle fasi meno onerose il massimo numero di I.M.D. alternativi. In numerose situazioni sperimentate dagli Autori queste prime fasi sono adeguate alla individuazione della totalità degli I.M.D. pertanto è ragionevole ritenere che, in generale, l'applicazione delle sole prime fasi dell'algoritmo sia sufficiente ad ottenere se non la totalità degli I.M.D. almeno una larga frazione di questa, e per molte situazioni ciò potrà essere ritenuto sufficiente.

NOTAZIONI E DEFINIZIONI

Parte delle definizioni e delle notazioni qui utilizzate sono le stesse della Nota I, alla quale perciò si fa riferimento [1].

Originariamente, vale a dire prima di ogni trasformazione su di esso eseguita, l'insieme dei flussi S_0 contenuti nel ciclo massimo considerato è rappresentato da un grafo G_0 oppure dal sistema (equivalente al grafo) di relazioni formali I_0 . La struttura informativa così rappresentata non è quella del tutto essenziale dal momento che contiene, in generale, informazioni da ritenersi ridondanti al fine della risoluzione del problema qui proposto. Pertanto occorre applicare alcuni criteri semplificativi, descritti nel paragrafo successivo, per ridurre il sistema alla sua « struttura essenziale », rappresentata dall'insieme ξ_0 di flussi corrispondente al sistema di relazioni formali ξ_0 .

Le considerazioni che seguono sono da applicarsi appunto alla « struttura essenziale ». L'insieme ξ_0 dei flussi (in generale multipli) costituenti il grafo ξ_0 considerato possiede N_i (≥ 1) distinti insiemi minimi dominanti $tMIN_i$ ($i = 1, \dots, N_i$) caratterizzati dalle ovvie proprietà:

- tutti i $tMIN_i$ sono caratterizzati da un egual peso complessivo ovvero da un eguale numero di flussi semplici, pari ad n_i ($n_i = |tMIN_i|$);
- ogni $tMIN_i$ differisce da ogni altro per almeno un flusso costituente.

La totalità degli insiemi $tMIN_i \subset \xi_0$ costituisce un insieme $\xi MIN = \{tMIN_1, tMIN_2, \dots, tMIN_{N_i}\}$.

La totalità dei flussi contenuti in ξMIN costituisce a sua volta un insieme $\xi MIN = tMIN_1 \cup tMIN_2 \cup \dots \cup tMIN_{N_i}$ ($\xi MIN \subseteq \xi_0$).

Ovviamente i flussi appartenenti al complementare di $\mathfrak{S}MIN$ in \mathfrak{E}_0 , cioè a $\bar{\mathfrak{S}}MIN = \mathfrak{E}_0 - \mathfrak{S}MIN$ non possono appartenere ad alcun minimo insieme dominante.

È importante considerare un altro particolare insieme, contenuto in $\mathfrak{S}MIN$: $\mathfrak{S}NEC = tMIN_1 \cap tMIN_2 \cap \dots \cap tMIN_{N_t}$ ($\mathfrak{S}NEC \subseteq \mathfrak{S}MIN$). I flussi costituenti $\mathfrak{S}NEC$ appartengono simultaneamente a *tutti* gli insiemi $tMIN_i$, (cioè sono costituenti *necessari* di ogni minimo insieme di tagli dominante) ⁽¹⁾. Conseguentemente i flussi costituenti l'insieme complementare di $\mathfrak{S}NEC$ in $\mathfrak{S}MIN$: $\bar{\mathfrak{S}}NEC = \mathfrak{S}MIN - \mathfrak{S}NEC$ sono detti *sostituibili*.

Se $\mathfrak{S}NEC = \mathfrak{S}MIN$ (cioè se $\bar{\mathfrak{S}}NEC$ è vuoto) nessun flusso è sostituibile tutti sono necessari, $tMIN_1 = \mathfrak{C}MIN$ esiste un *unico* insieme minimo dominante in \mathfrak{E}_0 . Se viceversa $\mathfrak{S}NEC$ è vuoto (cioè $\bar{\mathfrak{S}}NEC = \mathfrak{S}MIN$) nessun flusso è necessario, tutti sono sostituibili ed esiste una molteplicità di insiemi minimi dominanti. Il generico I.M.D. è costituito da una parte a tutti comune ($\mathfrak{S}NEC$) e da una parte specifica di ciascuno.

Sia $t'MIN_i = tMIN_i - \mathfrak{S}NEC$ la parte specifica del generico I.M.D. ($\bar{\mathfrak{S}}NEC = t'MIN_1 \cup t'MIN_2 \cup \dots \cup t'MIN_{N_t}$). La determinazione della totalità degli I.M.D., cioè di $\mathfrak{C}MIN$ può essere decomposta nei due problemi della determinazione di $\mathfrak{S}NEC$ e della totalità dei $t'MIN_i$, appartenenti a $\mathfrak{C}MIN = \{t'MIN_1, t'MIN_2, \dots, t'MIN_{N_t}\}$.

Anche per questo metodo è vantaggioso utilizzare come rappresentazione simbolica del grafo direzionato, l'equivalente sistema delle relazioni formali tra i flussi [1].

DESCRIZIONE DEL METODO

Semplificazioni sul sistema originario.

Prima di procedere alla ricerca sistematica di tutti gli I.M.D. è opportuno condurre le possibili semplificazioni sull'insieme originario dei flussi S_0 (rappresentato dal grafo G_0 oppure dal sistema di relazioni formali I_0) così da ridurlo alla sua « struttura essenziale ».

Le semplificazioni si conducono sia sul sistema I_0 che sul suo opposto I_0^* sulla base del criterio R 3 già esposto nella Nota I e che viene qui richiamato nella forma appropriata.

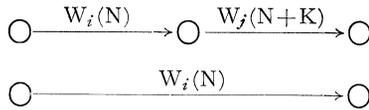
Si consideri un nodo cui siano associati un solo flusso entrante e un solo flusso uscente (eventualmente multipli): se il flusso uscente ha un peso complessivo superiore a quello entrante, può essere da quest'ultimo sostituito defi-

(1) Ovviamente anche per il sistema originario I_0 sarà definibile un insieme SNEC costituito dai flussi che appartengono simultaneamente a tutti gli I.M.D. del grafo originario G_0 . In virtù delle semplificazioni apportate a G_0 per ottenere la struttura essenziale \mathfrak{E}_0 si avrà:

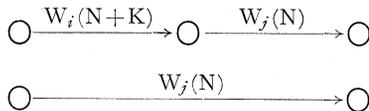
$$SNEC \subseteq \bar{S}NEC.$$

Saranno cioè riconoscibili in $\mathfrak{S}NEC$ dei flussi « esternamente necessari » (cioè contenuti in $\mathfrak{S}NEC$) e dei flussi « internamente necessari » e cioè tali solo per la struttura semplificata.

nitivamente (perché certamente non appartenente a SMIN) dal momento che contiene informazioni ridondanti.



Se viceversa il peso complessivo del flusso entrante è maggiore di quello del flusso uscente, per le medesime considerazioni condotte sul grafo opposto, è possibile sostituire il flusso entrante con quello uscente



– se infine i due flussi hanno lo stesso peso, dal momento che contengono informazioni equivalenti, possono essere sostituiti arbitrariamente secondo uno dei due precedenti criteri. Tali flussi sono fra loro « *permutabili* », ciò significa che se esistono uno o più I.M.D. contenenti l'insieme sostituito si possono generare altrettanti I.M.D. contenenti l'insieme sostituito.

Evidentemente, in quest'ultimo caso, gli insiemi di flussi sostituiti da quelli equivalenti restanti nel sistema vanno accantonati e memorizzati per poter generare al termine del procedimento gli I.M.D. alternativi.

Corrispondentemente alla sostituzione di flussi vengono soppresse le relazioni divenute superflue in base alla applicazione del criterio R2 della Nota I (si sopprimono cioè le relazioni il cui secondo membro è costituito esclusivamente da flussi già soppressi). Al termine della semplificazione si hanno due insiemi di flussi ξ_0 e ξ_0^* e due sistemi di relazioni formali \mathfrak{F}_0 e \mathfrak{F}_0^* (provenienti dal grafo originario e dal suo opposto).

DETERMINAZIONE DELL'I.M.D.-BASE

Il metodo sviluppato utilizza la conoscenza di un primo I.M.D. di ξ_0 per generare da questo successivamente tutti gli altri.

Pertanto, preliminarmente viene applicato l'algoritmo descritto nella Nota I per determinare un singolo I.M.D., che può essere definito insieme-base, MIN_1 , con l'avvertenza di accantonare come sicuramente facenti parte di ξ_{NEC} gli autocicli contenuti in ξ_0 .

OPERAZIONE DI CONFRONTO LOGICO TRA GLI I.M.D. ED IL SISTEMA DI RELAZIONI FORMALI \mathfrak{F}_0

Noto l'I.M.D. di base è possibile dedurre altri I.M.D. attraverso un opportuno confronto tra questo e il sistema delle relazioni formali \mathfrak{F}_0 e il suo opposto \mathfrak{F}_0^* .

La proprietà che sta alla base della operazione di confronto è la seguente: sia R_j una generica relazione formale del sistema:

$$E_j \rightarrow U_j$$

– sia $tMIN_i$ un generico I.M.D. (che in particolare può essere quello di base); – sia infine $F_j = E_j \cup U_j$ l'insieme dei flussi nominati nella relazione R_j .

Se $|E_j| = |tMIN_i \cap F_j|$ allora l'insieme $tMIN_K = E_j \cup (tMIN_i - (tMIN_i \cap F_j))$ costituisce un altro I.M.D.

Ovviamente condizione necessaria è $|E_j| \leq |tMIN_i|$ (cioè $e_j \leq n_i$).

Tale proprietà può essere formalizzata in termini della operazione di combinazione definita nella Nota I. Infatti la conoscenza di $tMIN_i$ è equivalente alla scrittura della seguente relazione formale:

$$RMIN_i = (tMIN_i \rightarrow \xi_0).$$

Se si costruisce la relazione

$$RMIN_{j,i} = R \circ RMIN_i = (E_{j,i} \rightarrow \xi_0)$$

risulterà sempre

$$|E_{j,i}| \geq n_i.$$

Se in particolare $|E_{j,i}| = n_i$ allora $E_{j,i} = tMIN_k$, appartiene a $\mathcal{T}MIN$.

Si definisce operazione di confronto tra il sistema di relazioni formali \mathfrak{D}_0 e il generico I.M.D. $tMIN_i$ (e si indica con il simbolo $\mathfrak{D}_0 \cdot CFR \cdot tMIN_i$) la sequenza di operazioni di combinazione tra le singole relazioni di \mathfrak{D}_0 e $RMIN_i$,

$$R_1 \circ RMIN_i = (E_{1,i} \rightarrow S_0)$$

$$R_2 \circ RMIN_i = (E_{2,i} \rightarrow S_0)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$R_j \circ RMIN_i = (E_{j,i} \rightarrow S_0)$$

e la individuazione degli insiemi $E_{j,i}$ tali che, essendo $|E_{j,i}| = n_i$, appartengono a $\mathcal{T}MIN$.

Ovviamente è superfluo eseguire le combinazioni con relazioni per cui $e_j > n_i$ perché inutili ai fini del confronto.

In base alla proprietà già esposta nella Nota I per la quale gli I.M.D. sono gli stessi per il sistema \mathfrak{D}_0 , derivato dal grafo \mathfrak{G}_0 e per \mathfrak{D}_0^* , derivato dal grafo opposto \mathfrak{G}_0^* , l'operazione confronto può essere condotta allo stesso modo con \mathfrak{D}_0^* . L'estensione della operazione ad entrambi \mathfrak{D}_0 e \mathfrak{D}_0^* si indica con il simbolo

$$(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_0^*) \cdot CFR \cdot tMIN_i.$$

È dunque possibile generare altri I.M.D. attraverso l'operazione confronto tra i sistemi $\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_0^*$ e l'insieme di base: d'altra parte ogni nuovo eventuale insieme appartenente a $\mathcal{T}MIN$ può essere assoggettato all'operazione confronto e così via fino ad esaurimento, cioè fin quando la applicazione sistematica dell'operatore non è più in grado di fornire nuovi I.M.D.

INDIVIDUAZIONE DI $\mathfrak{S}NEC$

Sia kc il numero totale di I.M.D. individuati al termine dell'uso dell'operatore confrontato a partire dall'insieme di base.

Va rilevato che

$$\mathfrak{S}NEC \subseteq \mathfrak{S}kc = (tMIN_2 \cap tMIN_2 \cap \dots \cap tMIN_{kc}).$$

Pertanto la ricerca dei flussi necessari va condotta solamente su $\mathfrak{S}kc$ ed inoltre escludendo da questo i flussi banali corrispondenti agli autocicli di \mathfrak{S}_0 (ovvii costituenti di $\mathfrak{S}NEC$).

Il metodo di individuazione dei flussi di $\mathfrak{S}NEC$ si fonda su una loro proprietà caratteristica:

Se si incrementa di una unità il peso di un flusso appartenente ad $\mathfrak{S}NEC$ (cioè se si introduce un nuovo flusso semplice concomitante a quello considerato) la dimensione degli I.M.D. del sistema così incrementato aumenta di una unità (cioè passa da n_i ad $n_i + 1$).

Complementare a questa proprietà è quella per la quale la incrementazione del peso di un flusso appartenente a $\overline{\mathfrak{S}NEC}$ non è seguita da alcuna variazione della dimensione di I.M.D.: in altri termini nel sistema così incrementato si ottiene in I.M.D. alternativo a quello che possedeva il flusso incrementato.

Pertanto la perturbazione, una alla volta, dei flussi appartenenti ad $\mathfrak{S}kc$ (e diversi dagli autocicli di \mathfrak{S}_0) è in grado di

– verificare che il flusso perturbato appartiene ad $\mathfrak{S}NEC$, se risulta incrementato, anche l'I.M.D. del sistema perturbato, determinato attraverso l'algoritmo della Nota I.

– oppure generare (attraverso l'algoritmo della Nota I) un nuovo I.M.D. alternativo a quello o quelli originari contenenti il flusso perturbato e avente la loro stessa dimensione.

La incrementazione del singolo flusso e l'applicazione dell'algoritmo della Nota I sul sistema perturbato per stabilire, trovato un I.M.D., se il flusso perturbato appartiene a $\mathfrak{S}NEC$ oppure per stabilire un I.M.D. alternativo si definisce « *operazione di perturbazione discreta* ».

I flussi semplici o multipli individuati come appartenenti ad $\mathfrak{S}NEC$ possono essere soppressi dal sistema perché non hanno alternativa e quindi la loro soppressione non interferisce con la determinazione dei $t'MIN_i$, rendendola anzi meno onerosa. Perciò nell'applicare l'operazione di perturbazione discreta conviene procedere sequenzialmente. Anzitutto si eliminano da \mathfrak{S}_0 e \mathfrak{S}_0^* (e quindi da \mathfrak{I}_0 e \mathfrak{I}_0^*) gli autocicli (banali componenti di $\mathfrak{S}NEC$) semplificando conseguentemente il sistema ed evidenziando, eventualmente (sempre sulla base del criterio di riduzione R₃) nuovi insiemi di flussi permutabili.

Successivamente si eliminano dal sistema gli altri flussi appartenenti ad $\mathfrak{S}NEC$ di mano in mano che essi emergono dalla operazione di perturbazione, riducendo così le dimensioni del sistema su cui si continua ad operare.

Nel caso in cui dall'operazione di perturbazione emergano I.M.D. alternativi ancora non considerati è opportuno sottoporli alla operazione di confronto (tra l'altro allo scopo di ridurre le dimensioni dell'insieme intersezione logica su cui ricercare i successivi componenti di $\mathfrak{S}NEC$).

Completato l'insieme $\mathfrak{S}NEC$, se esso non risulta vuoto, risultano anche eventualmente ridotti i sistemi \mathfrak{S}_0 e \mathfrak{S}_0^* perché privati dei flussi appartenenti ad $\mathfrak{S}NEC$ e successivamente semplificati in base ai criteri R2, R3.

Il completamento dell'insieme $\mathfrak{T}'MIN$ può essere raggiunto attraverso l'uso della struttura ridotta così ottenuta ⁽²⁾.

DEDUZIONE PER SOSTITUIBILITÀ DEI COMPONENTI DI $\mathfrak{T}'MIN$

Scopo della presente fase di ricerca è l'individuazione delle alternative ad uno o più flussi appartenenti agli insiemi $\mathfrak{T}'MIN_1$.

Per semplicità si supponrà inizialmente, di dover trovare tutte le alternative, non ancora evidenziate, ad un flusso appartenente ad un certo $\mathfrak{T}'MIN_i$; per fare ciò si assegnano tutti gli altri flussi dell'I.M.D. corrispondente e si semplifica di conseguenza il sistema. Il sotto-sistema semplificato così ottenuto possiede come sotto-insieme minimo dominante almeno il flusso del quale si vanno ricercando le alternative. Se perciò a questo sottosistema e al suo opposto si applica l'operazione di confronto con il flusso da sostituire, possono essere eventualmente ottenute le alternative al flusso considerato (a parità di tutti gli altri costituenti l'I.M.D.).

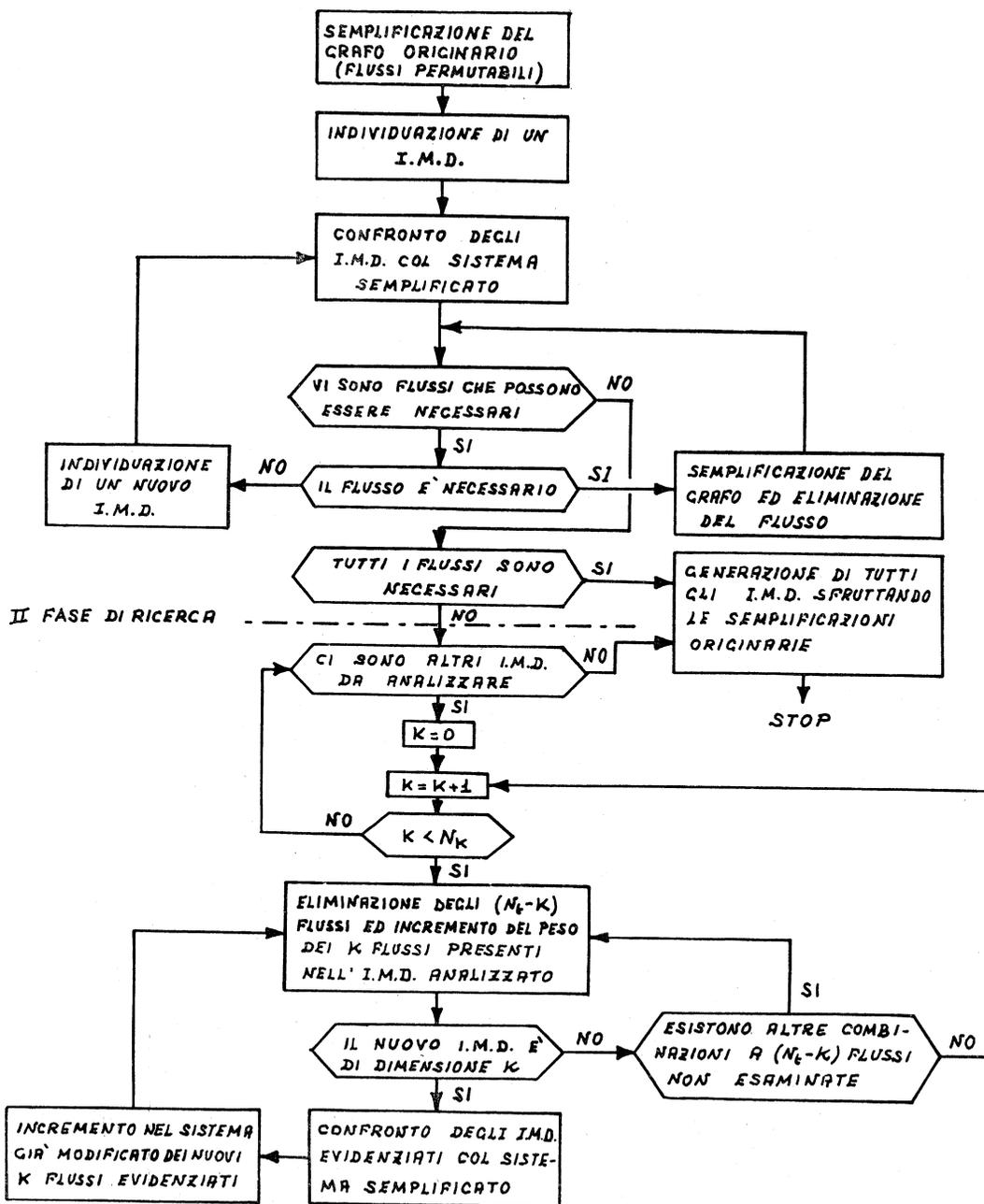
Se poi l'operazione confronto non genera alternative è possibile che il flusso considerato sia non sostituibile (a parità degli altri flussi appartenenti allo stesso I.M.D.).

Per verificare ciò o per provare una transizione verso eventuali sostituenti non emersi nel confronto, si adotta conclusivamente l'operazione di perturbazione del flusso considerato.

Se i flussi equivalenti (con lo stesso peso) sono più d'uno (appartenenti a uno o più I.M.D.) tale operazione di perturbazione discreta va eseguita simultaneamente su tutti quei flussi che sono equivalenti a quello in esame: ciò si rende necessario per evitare di rigenerare degli I.M.D. già evidenziati in precedenza.

Infine, se sono emerse alternative, i nuovi I.M.D. così ottenuti vengono sottoposti all'operazione confronto. Più in generale la ricerca di sostituibilità viene svolta continuamente sui raggruppamenti di flussi, contenuti in ogni I.M.D. già introdotto in $\mathfrak{T}'MIN$, e ancora non indagati. Si avrà infatti avvertenza di riconoscere quei raggruppamenti di flussi, nell'ambito dei relativi I.M.D., per i quali le sostituibilità sono già state indagate.

(2) Occasionalmente gli I.M.D. di \mathfrak{S}_0 individuati al termine di questa fase, cioè dopo le operazioni di confronto e perturbazione, possono costituire già la totalità $\mathfrak{T}'MIN$.



$N_k \leq N_t$ livello assunto per la II fase di ricerca.

Fig. 1.

Via via che la ricerca di sostituibilità procede, si eleva il numero di flussi costituenti i raggruppamenti sottoposti al test della sostituibilità, fino ad esaurimento delle alternative (cioè fino a saturazione di $\mathcal{T}'\text{MIN}$).

In realtà, in tutti gli esempi analizzati dagli Autori, l'insieme $\mathcal{T}'\text{MIN}$ è risultato riempito ben prima di giungere a completamento della procedura e in particolare, dopo il più basso livello di ricerca di sostituibilità, data la potenza della operazione esaustiva di confronto nel generare I.M.D. alternativi, a partire da alcuni pochi.

SCHEMA OPERATIVO DELL'ALGORITMO

Nella fig. 1 è sinteticamente riportato lo schema logico operativo dell'algoritmo per l'individuazione della totalità degli I.M.D.

Tale schema logico, nel quale sono ben evidenziabili diversi livelli di ricerca nell'ambito della fase della ricerca per sostituibilità dei componenti di $\mathcal{T}'\text{MIN}$, è stato sviluppato fino alla messa a punto di un programma per calcolatore digitale che utilizza come sottoprogramma la SUBROUTINE GRAFO 1 [1]. (*Denominazione del programma* IFASE).

Il programma è stato utilizzato per l'individuazione di tutti gli I.M.D. per diversi esempi di grafi a flussi semplici e multipli (non necessariamente corrispondenti ad impianti chimici).

Tre di questi esempi, di diversa complessità, vengono riportati nell'Appendice e per uno di essi viene anche riportato il confronto coi precedenti metodi di ricerca degli I.M.D. basati sull'individuazione delle componenti cicliche [2, 5].

CONCLUSIONI

In questo lavoro l'algoritmo per la ricerca di un insieme minimo dominante in un grafo direzionato ciclico, presentato in [1] viene ripreso, generalizzato e reso idoneo per trovare tutti gli I.M.D. esistenti. Ciò se da un lato conclude la fase logica di decomposizione dei cicli massimi, fornendo tutte le soluzioni possibili per il «tearing minimo», in modo notevolmente agile e con tempi di calcolo ragionevoli, dall'altro costituisce la premessa opportuna dell'approccio alla risoluzione numerica del grafo, ove ulteriori parametri di scelta, non più solamente logici, debbono essere esaminati.

Avere a disposizione tutte le soluzioni logicamente equivalenti è, senza dubbio un vantaggio nella ricerca della procedura numerica che sia allo stesso tempo, la più rapida e la più sicura in termini di convergenza, specie se si tien conto del fatto che la definizione «a priori» di un obiettivo ottimale di decomposizione anche in senso numerico, del tipo «minimo tempo di calcolo complessivo di risoluzione» non risulta né facile né veramente oggettiva.

Se poi si guarda alle applicazioni di calcolo che se ne possono trarre, risoluzioni di equazioni di bilancio materiali ed energetici, progetto e simulazione di esercizio di impianti chimici industriali a struttura complessa e carat-

terizzati da modelli non lineari, allora è facile rendersi conto che, al di là degli obbiettivi puramente scientifici e speculativi, ciò che è realmente importante è poter confrontare alcuni schemi di decomposizione alternativi (col minimo numero di tagli), per accoppiarli ad algoritmi numerici di convergenza; da questo confronto, di solito nientaffatto esaustivo, emerge la soluzione ingegneristicamente valida.

Da questo punto di vista va considerata la suddivisione in fasi operative dell'algoritmo, specie nella sua traduzione in programma di calcolo, che consente di ottenere subito un numero cospicuo di I.M.D. da confrontare fra di loro a spese di un tempo di calcolo estremamente ridotto.

APPENDICE

Esempio I.

Si consideri come primo esempio il grafo riportato nella fig. 2 a (non immediatamente equivalente ad un impianto chimico) e il relativo sistema di relazioni formali

$$I_0 \left\{ \begin{array}{l} W_8(1) \rightarrow W_1(1) \\ W_1(1) + W_4(1) \rightarrow W_2(3) + W_3(1) \\ W_2(3) \rightarrow W_7(2) \\ W_6(1) + W_7(2) \rightarrow W_4(1) + W_5(1) \\ W_5(1) + W_3(1) + W_{12}(3) \rightarrow \\ \quad \rightarrow W_6(1) + W_8(1) + W_9(1) \\ W_9(1) \rightarrow W_{10}(2) \\ W_{10}(2) \rightarrow W_{11}(1) \\ W_{11}(1) \rightarrow W_{12}(3) \end{array} \right. \quad I_0^* \left\{ \begin{array}{l} W_1(1) \rightarrow W_8(1) \\ W_2(3) + W_3(1) \rightarrow W_1(1) + W_4(1) \\ W_7(2) \rightarrow W_2(3) \\ W_4(1) + W_5(1) \rightarrow W_6(1) + W_7(2) \\ W_6(1) + W_8(1) + W_9(1) \rightarrow \\ \quad \rightarrow W_5(1) + W_3(1) + W_{12}(3) \\ W_{10}(2) \rightarrow W_9(1) \\ W_{11}(1) \rightarrow W_{10}(2) \\ W_{12}(3) \rightarrow W_{11}(1) . \end{array} \right.$$

La prima fase di semplificazione, condotta sul sistema originario I_0 e sul suo opposto I_0^* , permette di evidenziare la « struttura essenziale » del grafo (v. fig. 2 b) e di ridurre congruentemente il sistema nella seguente forma:

$$\mathfrak{J}_0 \left\{ \begin{array}{l} W_8(1) + W_4(1) \rightarrow W_3(1) + W_7(2) \\ W_6(1) + W_7(2) \rightarrow W_4(1) + W_5(1) \\ W_3(1) + W_5(1) + W_9(1) \rightarrow \\ \quad W_6(1) + W_8(1) + W_9(1) \end{array} \right. \quad \mathfrak{J}_0^* \left\{ \begin{array}{l} W_3(1) + W_7(2) \rightarrow W_8(1) + W_4(1) \\ W_4(1) + W_5(1) \rightarrow W_6(1) + W_7(2) \\ W_6(1) + W_8(1) + W_9(1) \rightarrow \\ \quad W_3(1) + W_5(1) + W_9(1) . \end{array} \right.$$

Tale struttura è ancora in grado di fornire tutti gli I.M.D. pur di memorizzare i seguenti flussi « permutabili »

$$W_9(1) \longleftrightarrow W_{11}(1)$$

$$W_1(1) \longleftrightarrow W_8(1) .$$

Il flusso $W_9(1)$ che figura in ambo i membri della terza relazione del sistema I_0 , riconosciuto come autociclo, può essere eliminato dal sistema e memoriz-

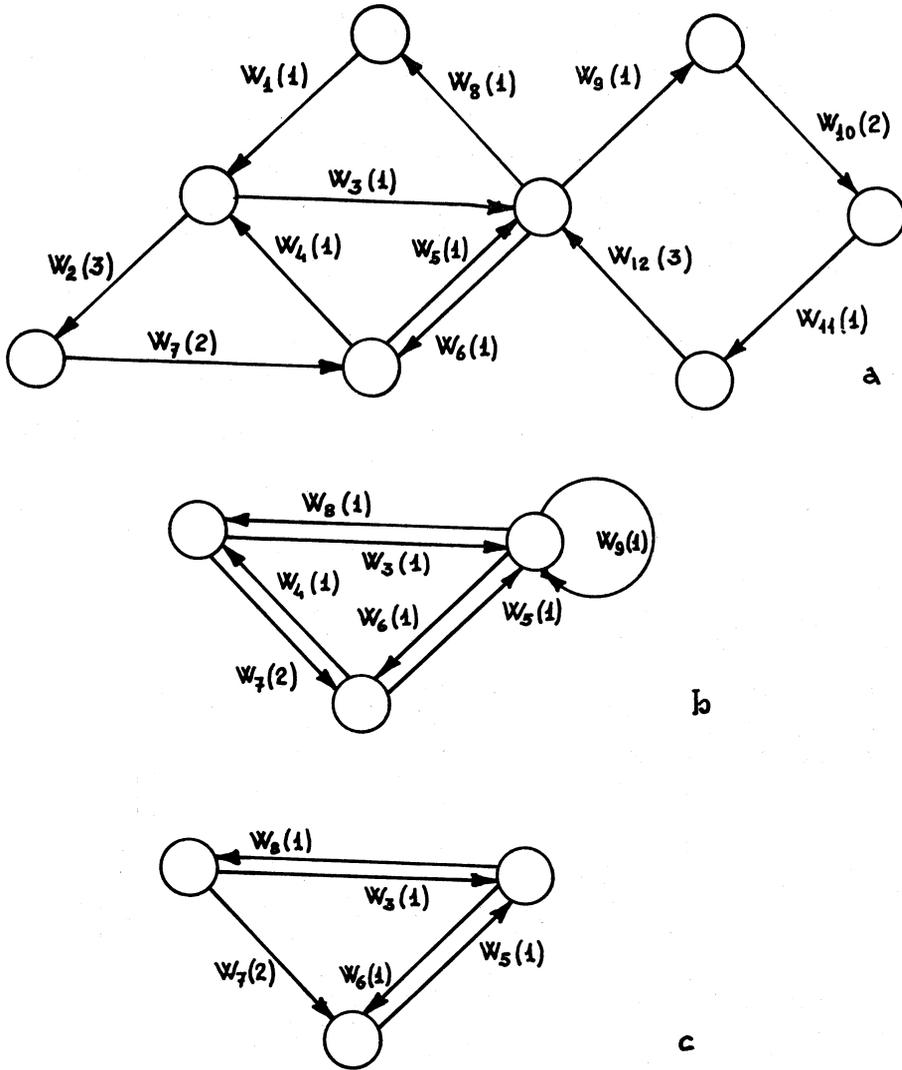


Fig. 2.

zato nell'insieme SNEC. Sul sistema ulteriormente ridotto la ricerca di un primo insieme $t'MIN_1$ viene condotta con l'algoritmo presentato nella Nota I. Tale ricerca porta all'individuazione dei flussi $W_8(1)$, e $W_6(1)$ come flussi di tearing.

Confrontando ora l'insieme $t'MIN_1 (W_8(1), W_4(1), W_6(1))$ coi due sistemi semplificati

$$\left\{ \begin{array}{l} W_8(1) + W_4(1) \rightarrow W_3(1) + W_7(2) \\ W_6(1) + W_7(2) \rightarrow W_4(1) + W_5(1) \\ W_3(1) + W_5(1) \rightarrow W_6(1) + W_8(1) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} W_3(1) + W_7(2) \rightarrow W_8(1) + W_4(1) \\ W_4(1) + W_5(1) \rightarrow W_6(1) + W_7(2) \\ W_6(1) + W_8(1) \rightarrow W_3(1) + W_5(1) \end{array} \right.$$

Sistema \mathfrak{S}_1
Sistema \mathfrak{S}_1^*

si individuano $t'MIN_2(W_4(1), W_3(1), W_5(1))$ e $t'MIN_3(W_8(1), W_4(1), W_5(1))$. Effettuando ancora l'operazione di confronto dei due nuovi insiemi trovati coi due sistemi \mathfrak{A}_1 e \mathfrak{A}_1^* non emergono nuovi insiemi minimi dominanti.

La ricerca dei costituenti di SNEC verrà quindi condotta esclusivamente sul flusso $W_4(1)$ (risultante dall'intersezione dei tre insiemi $t'MIN_1$, $t'MIN_2$ e $t'MIN_3$). Utilizzare allora il metodo di perturbazione discreta nei confronti del flusso W_4 equivale a ricercare l'I.M.D. dei seguenti sistemi nei quali il peso del flusso W_4 è stato incrementato di una unità

$$\left\{ \begin{array}{l} W_8(1) + W_4(2) \rightarrow W_3(1) + W_7(2) \\ W_6(1) + W_7(2) \rightarrow W_4(2) + W_5(1) \\ W_3(1) + W_5(1) \rightarrow W_6(1) + W_8(1) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} W_3(1) + W_7(2) \rightarrow W_8(1) + W_4(2) \\ W_4(2) + W_5(1) \rightarrow W_6(1) + W_7(2) \\ W_6(1) + W_8(1) \rightarrow W_3(1) + W_5(1) \end{array} \right.$$

Utilizzando nuovamente l'algoritmo di ricerca di un I.M.D. si individuano i flussi $W_3(1)$, $W_5(1)$, $W_7(2)$. Il flusso W_4 , risultando incrementato il peso complessivo dell'I.M.D. del sistema modificato, è un costituente di SNEC, è quindi presente in tutti gli I.M.D. del grafo semplificato.

Per completare la ricerca di tutti gli I.M.D. si passa alla ricerca dei $t'MIN_i$ semplificando però ulteriormente il grafo e quindi i sistemi \mathfrak{A}_1 e \mathfrak{A}_1^* ad esso relativi, sopprimendo il flusso W_4 . In fig. 2 c è riportato il grafo ridotto e sui due sistemi ad esso associati:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_8(1) \rightarrow W_3(1) + W_7(2) \\ W_6(1) + W_7(2) \rightarrow W_5(1) \\ W_3(1) + W_5(1) \rightarrow W_6(1) + W_8(1) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} W_3(1) + W_7(2) \rightarrow W_8(1) \\ W_5(1) \rightarrow W_6(1) + W_7(2) \\ W_6(1) + W_8(1) \rightarrow W_3(1) + W_5(1) \end{array} \right.$$

va ricercato l'insieme $T'MIN$ dapprima confrontandoli con $t'MIN_1(W_8(1), W_6(1))$ e successivamente con $t'MIN_2(W_3(1), W_5(1))$ e $t'MIN_3(W_8(1), W_5(1))$ ed infine effettuando la ricerca di sostituibilità dei componenti dei diversi $t'MIN_i$. Entrambe tali fasi non sono in grado di generare nuovi I.M.D. e in definitiva la totalità degli I.M.D., sfruttando la nozione di permutabilità dei flussi W_8 e W_9 , risulta la seguente:

$$W_9(1) \quad , \quad W_8(1) \quad , \quad W_4(1) \quad , \quad W_6(1)$$

$$W_{11}(1) \quad , \quad W_8(1) \quad , \quad W_4(1) \quad , \quad W_6(1)$$

$$W_9(1) \quad , \quad W_1(1) \quad , \quad W_4(1) \quad , \quad W_6(1)$$

$$W_{11}(1) \quad , \quad W_1(1) \quad , \quad W_4(1) \quad , \quad W_6(1)$$

$$W_9(1) \quad , \quad W_4(1) \quad , \quad W_3(1) \quad , \quad W_5(1)$$

$$W_{11}(1) \quad , \quad W_4(1) \quad , \quad W_3(1) \quad , \quad W_5(1) \quad .$$

Esempio 2.

Nel tabulato 1 viene riportato il sistema originario caratteristico del grafo di fig. 3 (cfr. esempio 2 della Nota I (1)) costituito da flussi semplici. In questo caso la fase di semplificazione non consente alcuna riduzione del grafo in quanto esso è già ridotto alla sua struttura essenziale. Nel tabulato 2 vengono riportati i risultati ottenuti ed è interessante notare come mediante la prima fase di ricerca (individuazione di un I.M.D. e successiva operazione di confronto

** SISTEMA ORIGINARIO																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	-1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	-1	0	0	0	0	0	1	-1
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	0	0
4	0	0	-1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0	1	-1	1	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	-1	0	0
9	0	0	0	0	0	-1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	1

PESI DEI FLUSSI (INDICE/PESO)																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

ESCE DALLA FASE DI SEMPLIFICAZIONE SENZA SUCCESSO																	
NON TROVA FLUSSI NECESSARI																	

Tabulato 1.

degli I.M.D. via via trovati col sistema originario) si siano evidenziati solo 6 dei 16 possibili insiemi minimi individuabili completando l'analisi con la seconda fase e cioè con la ricerca dei nuovi insiemi per sostituibilità dei diversi flussi costituenti gli I.M.D. via via evidenziati.

Il tempo di calcolo complessivo, su calcolatore UNIVAC 1108, è risultato di 14,5 secondi, dei quali, solo 0,68 secondi dedicati alla prima fase di ricerca.

È ancora interessante sottolineare come, nell'ambito della seconda fase di ricerca il tempo di calcolo complessivo, arrendendosi alla ricerca per sostituibilità di un solo flusso alla volta, è risultato di soli 2,7 secondi pur essendo sufficiente all'individuazione di tutti i 16 I.M.D. costituenti TMIN.

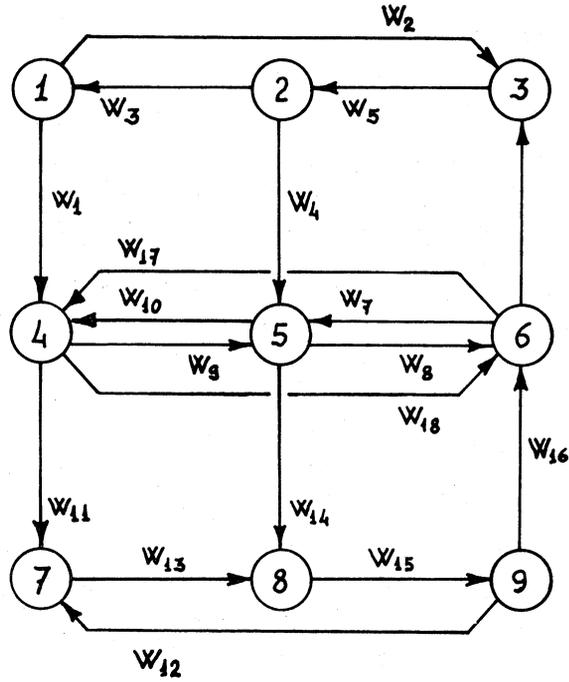


Fig. 3.

MEDIANTE LA PRIMA FASE DI RICERCA SI SONO OTTENUTI I SEGUENTI RISULTATI

**** 0 FLUSSI NECESSARI

**** 6 INSIEMI DI TEARING

15	9	9	7	17
15	3	8	10	17
5	8	10	15	17
13	5	7	10	17
5	7	10	15	17
15	18	9	5	8

** DOPO LA I E II FASE DI RICERCA SI SONO OTTENUTI I SEGUENTI RISULTATI

**** 0 FLUSSI NECESSARI

**** 16 INSIEMI DI TEARING

15	5	9	7	17
15	3	8	10	17
5	8	10	15	17
13	5	7	10	17
5	7	10	15	17
15	18	9	5	8
5	9	7	17	12
5	7	9	13	17
15	5	9	7	18
15	3	8	10	18
5	8	10	15	18
5	7	10	17	12
15	18	9	8	3
15	18	9	8	2
5	7	9	13	18
15	8	10	18	2

Tabulato 2.

A titolo di confronto seppur qualitativo coi metodi di ricerca di tutti gli I.M.D. basati sulla costruzione e sulla successiva analisi della matrice «cicli-flussi» [2, 5] viene riportata in fig. 4 la matrice di adiacenza relativa al grafo di fig. 3.

		al nodo								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
dal nodo	1	—	—	W_2	W_1	—	—	—	—	—
	2	W_3	—	—	—	W_4	—	—	—	—
	3	—	W_5	—	—	—	—	—	—	—
	4	—	—	—	—	W_9	W_{18}	W_{11}	—	—
	5	—	—	—	W_{10}	—	W_8	—	W_{14}	—
	6	—	—	W_6	W_{17}	W_7	—	—	—	—
	7	—	—	—	—	—	—	—	W_{13}	—
	8	—	—	—	—	—	—	—	—	W_{15}
	9	—	—	—	—	—	W_{16}	W_{12}	—	—

Fig. 4. — Matrice di adiacenza del grafo di fig. 3.

La risoluzione algebrica del determinante ad essa associata consente di individuare le seguenti componenti cicliche:

C_1	$W_{13} W_{15} W_{12}$	C_{11}	$W_2 W_3 W_5$
C_2	$W_{13} W_{15} W_{16} W_{11} W_{17}$	C_{12}	$W_3 W_5 W_1 W_6 W_{18}$
C_3	$W_{13} W_{15} W_{16} W_{11} W_{10} W_7$	C_{13}	$W_3 W_5 W_1 W_6 W_9 W_8$
C_4	$W_{13} W_{15} W_{16} W_{11} W_6 W_5 W_3 W_1$	C_{14}	$W_3 W_5 W_1 W_6 W_9 W_{16} W_{15} W_{14}$
C_5	$W_{13} W_{15} W_{16} W_{11} W_6 W_5 W_4 W_{10}$	C_{15}	$W_{14} W_{15} W_{16} W_7$
C_6	$W_7 W_8$	C_{16}	$W_{14} W_{15} W_{16} W_9 W_{17}$
C_7	$W_9 W_{10}$	C_{17}	$W_{14} W_{15} W_{16} W_4 W_5 W_6$
C_8	$W_9 W_8 W_{17}$	C_{18}	$W_4 W_5 W_6 W_{10} W_{18}$
C_9	$W_7 W_{10} W_{18}$	C_{19}	$W_4 W_5 W_6 W_8$
C_{10}	$W_{17} W_{18}$		

Calcolando poi la funzione dominante del grafo:

$$f = \prod_{i=1}^{19} C_i$$

è possibile individuare, sfruttando le proprietà minimali dell'algebra Booleana:

$$(W_1 + W_2) W_2 = W_1 W_2 + W_2 = W_2,$$

tra i possibili insiemi dominanti risultanti quelli effettivamente minimi.

relativo al grafo semplificato riportato in fig. 5. Nel tabulato 4 vengono infine elencati i 15 I.M.D. evidenziati nel corso della prima fase di ricerca (operazione esaustiva di confronto dei diversi I.M.D. col sistema semplificato e col suo opposto).

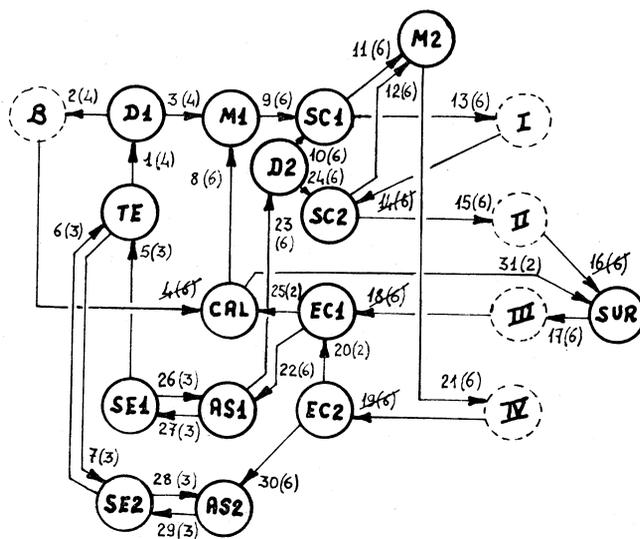


Fig. 5.

Anche in questo caso, come d'altronde in un cospicuo numero di altri esempi sperimentati, la seconda fase di ricerca non ha portato all'individuazione di alcun nuovo I.M.D.

MEDIANTE LA PRIMA FASE DI RICERCA SI SONO OTTENUTI I SEGUENTI RISULTATI

**** 0 FLUSSI NECESSARI

**** 15 INSIEMI DI TEARING

29	6	25	22	26
6	22	25	27	29
6	23	25	27	29
6	17	20	26	29
7	22	25	28	29
6	22	25	26	28
6	17	20	27	29
7	22	25	27	29
6	22	25	27	28
7	23	25	27	29
6	23	25	27	28
7	17	20	26	29
6	17	20	26	28
7	17	20	27	29
6	17	20	27	26

Tabulato 4.

In definitiva la totalità dei 21 I.M.D. del grafo originario sarà immediatamente desumibile dai 15 I.M.D. del grafo semplificato e cioè generando i 6 nuovi I.M.D. contenenti il flusso $W_{18}(2)$ come sostitutivo del flusso $W_{17}(2)$

$$\begin{aligned}
 &W_6(3) \quad , \quad W_{18}(6) \quad , \quad W_{20}(2) \quad , \quad W_{26}(3) \quad , \quad W_{29}(3) \\
 &W_6(3) \quad , \quad W_{18}(6) \quad , \quad W_{20}(2) \quad , \quad W_{27}(3) \quad , \quad W_{29}(3) \\
 &W_7(3) \quad , \quad W_{18}(6) \quad , \quad W_{20}(2) \quad , \quad W_{26}(3) \quad , \quad W_{29}(3) \\
 &W_6(3) \quad , \quad W_{18}(6) \quad , \quad W_{20}(2) \quad , \quad W_{26}(3) \quad , \quad W_{28}(3) \\
 &W_7(3) \quad , \quad W_{18}(6) \quad , \quad W_{20}(2) \quad , \quad W_{27}(3) \quad , \quad W_{29}(3) \\
 &W_6(3) \quad , \quad W_{18}(6) \quad , \quad W_{20}(2) \quad , \quad W_{27}(3) \quad , \quad W_{28}(3) .
 \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. DENTE, E. RANZI, S. PIERUCCI e G. BIARDI, « Acc. Naz. Lincei », 54, 770 (1973).
- [2] T. H. MOTT, « IRE, Trans. on Electronic Computers », *EC-10*, 245 (1960).
- [3] I. B. PYNE e E. J. MCCLUSKEY, « IRE Trans. on Electronic Computers », *EC-II*, 473 (1962).
- [4] F. LUCCIO, « IRE Trans. on Electronic Computers », *EC-I5*, 205 (1966).
- [5] A. LEMPBEL e I. CEDERBAUM, « IRE Trans. on Circuit Theory », *CT-10*, 399 (1966).
- [6] G. J. FORDER e H. P. HUTCHINSON, « Chem. Eng. Science », 24, 771 (1969).