Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gianfranco Bottaro

Problema al contorno misto per equazioni ellittiche di tipo variazionale su insiemi non limitati

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.3-4, p. 187–193.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_3-4_187_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Analisi matematica. — *Problema al contorno misto per equazioni ellittiche di tipo variazionale su insiemi non limitati* (*). Nota (**) di GIANFRANCO BOTTARO, presentata dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

SUMMARY. — I prove a theorem of existence and uniqueness for solutions of mixed boundary value problems for linear second order elliptic partial differential equations in divergence form with discontinuous coefficients.

INTRODUZIONE

Scopo del presente lavoro è studiare l'esistenza e l'unicità per problemi al contorno misti per equazioni ellittiche di tipo variazionale. Nel caso di dominio limitato il teorema di esistenza e unicità è stato provato in [3], qui vogliamo ritrovare lo stesso risultato nel caso di dominio non limitato.

Sia Ω aperto di $\mathbf{R}^n$, a frontiera lipschitziana uniformemente regolare (cfr. [2]), che goda della proprietà di cono; sia $H^1(\Omega)$ lo spazio ottenuto completando rispetto alla norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \{\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}\}^{1/2} \tag{0.1}$$

ove

$$\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{0.2}$$

il sottospazio delle funzioni di $C^1(\overline{\Omega})$ per le quali il secondo membro di (0.1) riesce finito.

Sia Γ_0 un sottinsieme chiuso di $\partial\Omega$ e sia $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$.

Sia V il sottospazio chiuso di $H^1(\Omega)$ così definito:

$$V = \{u \in H^1(\Omega) : \quad u = 0 \quad \text{su } \Gamma_0 \text{ nel senso di } H^1(\Omega)\}. \tag{0.3}$$

Consideriamo la seguente forma bilineare su $V \times V$:

$$b(u, v) = \int_\Omega \left[\sum_{ij=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i} + d_j u) v_{x_j} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu\right) v\right] dx + \int_{\Gamma_1} g\, uv\, d\sigma \ ^{(1)} \tag{0.4}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del «Centro di Matematica e Fisica Teorica» del C.N.R. presso l'Università di Genova.

(**) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1973.

(1) Naturalmente nell'ultimo integrale u e v rappresentano le tracce di u e v su Γ_1.

ove

$$\nu\,|\xi|^2 \leq \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j\,, \qquad \nu > 0 \quad , \quad \xi \in \mathbf{R}^n \quad \text{per q.o.} \quad x \in \Omega \tag{0.5}$$

$$a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)\,(i\,,j = 1\,,\cdots,n) \qquad b_i\,,d_i \in L^n(\Omega)\,, \quad (i = 1\,,\cdots,n)$$

$$c \in L^{n/2}(\Omega) + L^{\infty}(\Omega) \quad , \quad g \in L^{n-1}(\Gamma_1) + L^{\infty}(\Gamma_1).$$

Consideriamo il seguente problema

$$\begin{cases} b\,(u\,,v) = \langle G\,,v\rangle & \text{per ogni} \quad v \in V \\ u \in V \end{cases} \tag{0.6}$$

ove

$$\langle G\,,v\rangle = \int_{\Omega} fv\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} f_i\,v_{x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} hv\,\mathrm{d}\sigma \tag{0.7}$$

essendo

$$f \in L^2(\Omega) + L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega) \quad , \quad f_i \in L^2(\Omega) \qquad (i = 1\,,\cdots,n) \tag{0.8}$$

$$h \in L^{\frac{2n-2}{n}}(\Gamma_1) + L^2(\Gamma_1).$$

Tale problema, come già osservato in [3], traduce in forma variazionale per equazioni ellittiche a coefficienti discontinui il problema al contorno misto.

1. Alcuni lemmi

Ci occorre estendere alle funzioni di V alcuni lemmi provati in [1] e [5] per le funzioni di $H_0^1(\Omega)$.

Innanzitutto proviamo il

LEMMA 1.1. *Sia* $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *una funzione uniformemente lipschitziana tale che* $T(0) = 0$, $tT(t) \geq 0$ *per ogni* $t \in \mathbf{R}$.

Se $u \in V$, *allora* $T \circ u \in V$. *Inoltre se la derivata* T' *di* T *è continua eccetto al più un numero finito di punti, allora*:

$$(T \circ u)_{x_i} = (T' \circ u)\,u_{x_i} \qquad (i = 1\,,\cdots,n) \tag{1.1}$$

nel senso delle distribuzioni, ove il secondo membro deve intendersi nullo ove T' *non è definito.*

Dimostrazione. Proveremo soltanto la prima parte dell'asserzione in quanto la dimostrazione della (1.1) non differisce da quella esposta in [5], salvo poche varianti: c'è solo da osservare che per passare dal caso di Ω limitato a quello di Ω non limitato, si può utilizzare una successione di funzioni a supporto compatto approssimante u in $H^1(\Omega)$.

Sia $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una successione di $C^1(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ convergente ad u nella norma (0.1), $u_n(x) \geq 0$ se $x \in \Gamma_0$. Allora $T \circ u_n \in H^1(\Omega)$: infatti se L è la costante di Lipschitz di T si ha:

$$\int_{\Omega} |T \circ u_n|^2 \, dx = \int_{\Omega} |T \circ u_n - T(0)|^2 \, dx \leq L^2 \int_{\Omega} |u_n|^2 \, dx \tag{1.2}$$

$$(T \circ u_n)_{x_i} = (T' \circ u_n)(u_n)_{x_i} \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{1.3}$$

in cui $T' \circ u_n$ è posto per definizione nullo ove T' non è definito.

La (1.3) si può verificare così: sia $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e sia Ω_0 un aperto relativamente compatto contenente il supporto di φ. Sia $K_j = \{x \in \operatorname{supp} \varphi : (T \circ u_n)(x) = t_j\}$ $(j = 1, \cdots, k)$ ove $t_1, \cdots, t_k$ sono i punti in cui T non è derivabile, allora K_j è compatto ed esiste un sottoinsieme aperto Ω_j di Ω_0 con le proprietà che $K_j \subset \Omega_j$. Sia allora $\psi_0, \psi_1, \cdots, \psi_k$ una partizione dell'unità relativa a supp φ, con supp $\psi_j \subset \Omega_j$, supp $\psi_0 \subset \Omega_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{k} K_j$, allora

$$\int_{\Omega} (T' \circ u_n)(u_n)_{x_i} \varphi \, dx + \int_{\Omega} (T \circ u_n) \varphi_{x_i} \, dx =$$

$$= \int_{\Omega_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{k} K_j} (T' \circ u_n)(u_n)_{x_i} \psi_0 \varphi \, dx + \sum_{j=1}^{k} \int_{\Omega_j} [(T' \circ u_n)(u_n)_{x_i} \psi_j \varphi] \, dx +$$

$$+ \int_{\Omega_0 \setminus \bigcup_{s=1}^{k} K_j} (T \circ u_n)(\psi_0 \varphi)_{x_i} \, dx + \sum_{j=1}^{k} \int_{\Omega_j} (T \circ u_n)(\psi_j \varphi)_{x_i} \, dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \int_{\Omega_j \setminus K_j} [(T' \circ u_n)(u_n)_{x_i} \psi_j \varphi] \, dx +$$

$$+ \sum_{s=1}^{k} \int_{\Omega_j} (T \circ u_n - t_j)(\psi_j \varphi)_{x_i} \, dx + \sum_{j=1}^{k} t_j \int_{\Omega_j} (\psi_j \varphi)_{x_i} \, dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \int_{\Omega_i \setminus K_j} [(T' \circ u_n)(u_n)_{x_i} + (T \circ u_n - t_j)(\psi_j \varphi)_{x_i}] \, dx = 0$$

facendo una integrazione per parti.

Ne segue

$$\int_{\Omega} |(T \circ u_n)_{x_i}|^2 \, dx \leq L^2 \int_{\Omega} |(u_n)_{x_i}|^2 \, dx . \tag{1.4}$$

La (1.2) e la (1.4) provano appunto che $T \circ u_n \in H^1(\Omega)$, non solo, ma poiché le u_n, essendo convergenti, hanno norme uniformemente limitate in $H^1(\Omega)$, le stesse (1.2) e (1.4) mostrano che $T \circ u_n$ formano un sottinsieme relativamente debolmente compatto di $H^1(\Omega)$. Inoltre si ha anche

$$(1.5) \qquad \|T \circ u_n - T \circ u\|_{L^2(\Omega)} \leq L \, \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)}$$

che afferma la convergenza di $T \circ u_n$ a $T \circ u$ in $L^2(\Omega)$.

Perciò esiste una sottosuccessione $\{T \circ u_{n_p}\}_{p \in \mathbf{N}}$ di $\{T \circ u_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ debolmente convergente in $H^1(\Omega)$, che, per l'unicità del limite converge in $L^2(\Omega)$ a $T \circ u$. Poiché $H^1(\Omega)$ è riflessivo, esiste per il teorema di Banach–Sacks una successione di medie convesse di $T \circ u_{n_p}$ che converge a $T \circ u$ nella topologia della norma. Poiché le medie convesse non alterano il segno delle funzioni si ha $T \circ u \geq 0$ su Γ_0 nel senso di $H^1(\Omega)$. Poiché il discorso si ripete per una successione u_n tale che $u_n \leq 0$ su Γ_0 si deduce che $T \circ u \in V$ per definizione.

LEMMA 1.2. *Sia* $f \in L^p(\Omega)$, $u \in V$. *Allora fissato* $a \in \mathbf{R}_+$, *è possibile determinare* $\Omega_1, \cdots, \Omega_r$ *sottinsiemi misurabili disgiunti di* Ω *ed* $u_1, \cdots, u_r$ *elementi di* V, *tali che*

$$(1.6) \qquad \|f\|_{L^p(\Omega_s)} = a \qquad s = 1, \cdots, r-1 \qquad \|f\|_{L^p(\Omega_r)} \leq a$$

$$(1.7) \qquad \{x \in \Omega : (u_s)_x(x) \neq 0\} \subset \Omega_s \qquad s = 1, \cdots, r$$

$$(1.8) \qquad u u_s \geq u_s^2 \qquad s = 1, \cdots, r$$

$$(1.9) \qquad u_x = (u_s)_x \quad \text{in} \quad \Omega_s \qquad s = 1, \cdots, r$$

$$(1.10) \qquad (u_1 + \cdots + u_s)_x \, u_s = u_x \, u_s \qquad s = 1, \cdots, r$$

$$(1.11) \qquad u_1 + \cdots + u_r = u .$$

Inoltre si ha

$$(1.12) \qquad r \leq (a^{-1} \|f\|_{L^p(\Omega)})^p + 1 .$$

La dimostrazione salvo ovvie varianti che utilizzano il presente Lemma 1.1., è la stessa del Lemma 1.3 di [1].

Ricordiamo infine i seguenti risultati della teoria degli spazi di Sobolev (vedi ad esempio [2] e [4]).

LEMMA 1.3. *Sia* Ω *aperto di* $\mathbf{R}^n$ *a frontiera lipschitziana uniformemente regolare, che goda della proprietà di cono.*

Sia $u \in H^1(\Omega)$ *risulta*

$$(1.13) \qquad \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq \eta \, \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

ove $\dfrac{1}{2^*} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}$ *ed* η *è una costante dipendente solo da* n.

Se con u *indichiamo anche la traccia di* u *sulla frontiera si ha*

$$u \in L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega) \cap L^2(\partial\Omega).$$

2. TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ

Siamo ora in grado di provare la seguente valutazione a priori.

TEOREMA 2.1. *Se oltre alle ipotesi ammesse nella introduzione vale*

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} d_i (\varphi)_{x_i} + c\varphi \right) dx + \int_{\Gamma_1} g\varphi \, dx \geq K \int_\Omega \varphi \, dx \tag{2.1}$$

ove $K > 0$, e $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ $\varphi \geq 0$, $\varphi = 0$ *su* Γ_0, $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$ *con* $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$, *allora se* $u \in V$ *verifica la* (0.6) *si ha*

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} \leq (2^r - 1) \frac{2}{\alpha} \Phi \tag{2.2}$$

essendo

$$\Phi = \left\{ \| f' \|^2_{L^2(\Omega)} + \| f'' \|^2_{L^{2n/(n+2)}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \| f_i \|^2_{L^2(\Omega)} + \right. \tag{2.3}$$

$$\left. + \| h' \|^2_{L^{(2n-2)/n}(\partial\Omega)} + \| h'' \|_{L^2(\partial\Omega)} \right\}^{1/2}$$

ove

$$f = f' + f'' \quad , \quad f' \in L^2(\Omega) \quad , \quad f'' \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega), \tag{2.4}$$

$$h = h' + h'' \quad , \quad h' \in L^{\frac{2n-2}{n}}(\partial\Omega) \quad , \quad h'' \in L^2(\partial\Omega)$$

$$\alpha = \min(K, \nu) \tag{2.5}$$

$$r \leq \left(\frac{2\eta}{\alpha} \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} | b_i - d_i |^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^n(\Omega)} \right)^n + 1 .$$

definito nel Lemma 1.3.

Dimostrazione. Poiché $\left(\sum_{i=1}^{n} | b_i - d_i |^2 \right)^{1/2} \in L^n(\Omega)$, fissato $a = \frac{\alpha}{2\eta}$ si possono costruire $\Omega_1, \cdots, \Omega_r$ sottinsiemi di Ω e $u_1, \cdots, u_r$ funzioni di V che soddisfano a tutte le proprietà espresse nel Lemma 1.2.

Ponendo nella (0.6) $v = u_s$ $(s = 1, \cdots, r)$ otteniamo le relazioni seguenti (ove si utilizzano (1.7), (1.8), (1.9), (1.10)):

$$\int_\Omega f u_s \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i (u_s)_{x_i} \, dx + \int_{\Gamma_1} h u_s \, d\sigma =$$

$$= \int_\Omega \left[\sum_{ij=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i} + d_j u)(u_s)_{x_j} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu \right) u_s \right] dx +$$

$$+\int_{\Gamma_1} g u u_s \, d\sigma = \int_{\Omega} \left[\sum_{ij=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} (u_s)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} (b_i - d_i) u_{x_i} u_s + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} d_i (u u_s)_{x_i} + c u u_s \right] dx + \int_{\Gamma_1} g u u_s \, d\sigma \geq$$

$$\geq \int_{\Omega} \left[\sum_{ij=1}^{n} a_{ij} (u_s)_{x_i} (u_s) x_j + \sum_{i=1}^{n} (b_i - d_i) (u_s)_{x_i} u_s \right] dx +$$

$$+ \sum_{t=1}^{s-1} \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} (b_i - d_i) (u_t)_{x_i} u_s \, dx + K \int_{\Omega} |u_s|^2 \, dx .$$

Dalla diseguaglianza di Hölder si deduce che

$$\nu \, \|(u_s)_x\|^2_{L^2(\Omega)} + K \, \|u_s\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \eta \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i - d_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^n(\Omega_s)} \|(u_s)_x\|_{L^2(\Omega)} \, \|u_s\|_{H^1(\Omega)} +$$

$$+ \eta \sum_{t=1}^{s-1} \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i - d_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^n(\Omega_t)} \|(u_t)_x\|_{L^2(\Omega)} \, \|u_s\|_{H^1(\Omega)} + \Phi \, \|u_s\|_{H^1(\Omega)} .$$

Segue allora

$$\alpha \, \|u_s\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\alpha}{2} \, \|u_s\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\alpha}{2} \sum_{t=1}^{s-1} \|(u_t)_x\|_{L^2(\Omega)} \, \|u_s\|_{H^1(\Omega)} + \Phi \, \|u_s\|_{H^1(\Omega)}$$

e ancora

$$\|u_s\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{2}{\alpha} \Phi + \sum_{t=1}^{s-1} \|u_t\|_{H^1(\Omega)} \leq (2^s - 1) \frac{2}{\alpha} \Phi = \frac{2^s}{\alpha} \Phi . \tag{2.7}$$

La (2.7) è valida per ogni $s = 1, \cdots, r$ e quindi per la (1.7)

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \sum_{s=1}^{r} \|u_s\|_{H^1(\Omega)} = (2^r - 1) \left(\frac{2}{\alpha} \Phi \right) .$$

TEOREMA 2.2. *Nelle stesse ipotesi del Teorema* (2.1) *esiste una e una sola soluzione del problema* (0.5).

Dimostrazione. Sia $\Omega_m = \{x \in \Omega : |x| \leq m\}$. Sappiamo, come già osservato in [3], che vale l'alternativa di Fredholm per il problema misto:

$$\begin{cases} b(u_m, v) = \displaystyle\int_{\Omega_m} f v \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_m} f_i v_{x_i} \, dx + \int_{\Gamma_1 \cap \overline{\Omega_{m-1}}} h v \, d\sigma \\ u_m \in V_m \end{cases} \tag{2.8}$$

ove

$$V_m = \{u \in H^1(\Omega_m) : u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega_m \setminus (\Gamma_1 \cap \overline{\Omega_{m-1}}) \quad \text{nel senso di } H^1(\Omega_m)\}. \tag{2.9}$$

Dal Teorema 2.1 segue allora l'unicità e quindi l'esistenza di una soluzione $u_m \in V_m$.

Verifichiamo facilmente che si può prolungare u in Ω fuori di Ω_m come funzione nulla e che tale prolungamento rimane nello spazio V ed ha perciò la stessa norma. Infatti se $u_m \in H^1(\Omega_m)$, $u_m = 0$ su $\partial\Omega_m \setminus (\Gamma_1 \cap \overline{\Omega_{m-1}})$ nel senso di $H^1(\Omega_m)$ esistono $\varphi_k \in C^1(\overline{\Omega_m}) \cap H^1(\Omega_m)$, $\varphi_k = 0$ su $\partial\Omega_m \setminus (\Gamma_1 \cap \overline{\Omega_{m-1}})$, $\varphi_k \to u_m$ in $H^1(\overline{\Omega_m})$. Poiché $S(0, m+1) \setminus \overline{S(0, m-1)}$ e $S(0, m-1/2)$ costituiscono una copertura di $\overline{\Omega_m}$, ad essa si può associare una partizione differenziabile dell'unità ψ_1, ψ_2 relativa ad $\overline{\Omega_m}$. Si ha $\varphi_k \psi_2 \in C^1(\overline{\Omega_{m-1/2}})$, $\varphi_k \psi_2(x) = 0$ per ogni $x \in \partial\Omega_{m-1/2} \setminus (\Gamma_1 \cap \Omega_{m-1})$: allora tale funzione può essere prolungata definendola 0 in Ω fuori di $\Omega_{m-1/2}$ così che $\varphi_k \psi_2 \in C^1(\overline{\Omega})$; $\varphi_k \psi_1 \in C^1(\overline{\Omega_m \setminus \Omega_{m-1}}) \cap H_0^1(\Omega_m \setminus \Omega_{m-1})$ poiché $\varphi_k \psi_1(x) = 0$ per ogni $x \in \partial(\Omega_m \setminus \Omega_{m-1})$; allora esistono $\chi_{kn} \in C_0^1(\Omega_m \setminus \Omega_{m-1})$, tali che $\|\chi_{kn} - \varphi_k \psi_1\|_{H^1(\Omega_m \setminus \Omega_{m-1})} \leq 1/n$, quindi χ_{kn} si possono prolungare come funzioni nulle fuori di $\Omega_m \setminus \Omega_{m-1}$.

Ora $\chi_{kk} + \varphi_k \psi_2 \in C^1(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$, $(\chi_{kk} + \varphi_k \psi_2)(x) = 0$ per ogni $x \in \Gamma_0 \cup \cup (\Omega \setminus \Omega_m)$, $\chi_{kk} + \varphi_k \psi_2 \to u_m$ in $H^1(\Omega_m)$, $\chi_{kk} + \varphi_k \psi_2$ sono di Cauchy in $H^1(\Omega)$ e quindi convergono all'estensione richiesta di u_m.

Dal Teorema (2.1) segue allora che

$$\|u_m\|_{H^1(\Omega)} \leq \text{cost}\ \Phi$$

ove la costante a secondo membro non dipende da m.

Allora u_m è una successione relativamente debolmente compatta in V, quindi ammette un'estratta debolmente convergente in V. Poiché se $v \in V$: $u \mapsto b(u, v)$ è un funzionale lineare continuo su V segue che tale limite è una soluzione del problema (0.6). La sua unicità segue dal Teorema 2.1.

Osservazione. Come già nel caso del problema di Dirichlet si può prendere il dato su Γ_0 non omogeneo pur di fare opportune ipotesi su tale dato che permettano di scrivere il problema nella forma già considerata.

Poiché tali ipotesi sono già state esposte in [1] non le ripetiamo.

Notiamo ancora che come in [1] il Teorema 2.2 permette di trovare dei maggioranti per lo spettro.

L'Osservazione 1.1 di [1] infine mostra che anche qui l'ipotesi 2.1 non è eliminabile.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. F. BOTTARO e M. E. MARINA, *Problema di Dirichlet per equazioni ellittiche del tipo variazionale su insiemi non limitati*, « Bollettino U.M.I. », *8*, 46–56 (1973).

[2] F. E. BROWDER, *On the spectral theory of elliptic differential operators*. I, « Math. Annalen », *142*, 22–130 (1961).

[3] M. CHICCO, *Principio di massimo per soluzioni di problemi al contorno misti per equazioni ellittiche di tipo variazionale*, « Bollettino U.M.I. », *3*, 384–394 (1970).

[4] E. GAGLIARDO, *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, « Ricerche di Matematica », *7*, 102–137 (1958).

[5] G. STAMPACCHIA, *Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinues* (Séminaire de Mathem. Sup.). Les presses de l'Université de Montreal 1966.