Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesca Acquistapace, Fabrizio Broglia,
Alberto Tognoli

Sulla non validità di un teorema di approssimazione

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.3-4, p. 207–209.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_3-4_207_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Geometria. — *Sulla non validità di un teorema di approssimazione* (*). Nota (**) di FRANCESCA ACQUISTAPACE, FABRIZIO BROGLIA e ALBERTO TOGNOLI, presentata dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — The following theorem is true: if U is open in $\mathbf{R}^n$, $V \subset U$ is a coherent real analytic set, and $f: U \to \mathbf{R}$ is a C^∞ function such that $f|_V$ is analytic, then it is possible to approximate f (together with its derivatives) by analytic functions $\{f_n\}$ such that $f_n|_V = f|_V$. In this paper we prove that this result is not true unless V is coherent (with the reduced structure).

È noto il seguente teorema (dimostrato da A. Tognoli in [2]).

TEOREMA. *Sia* U *un aperto di* $\mathbf{R}^n$, V *un insieme analitico reale coerente di* U, $f: U \to \mathbf{R}$ *una funzione* C^∞ *tale che* $f|_V$ *sia analitica. Sia* $\varepsilon: U \to]0, +\infty[$ *una funzione continua. Fissato comunque un intero positivo* q, *esiste una funzione analitica* $g: U \to \mathbf{R}$ *tale che*: (a) $g|_V = f|_V$; (b) $\forall x \in U \; |(D^\alpha f)(x) - (D^\alpha g)(x)| < \varepsilon(x)$, $\forall \alpha \leq q$.

La seguente proposizione estende il teorema in un caso particolare.

PROPOSIZIONE. *Sia* V *un insieme analitico reale compatto in un aperto* U *di* $\mathbf{R}^n$; *supponiamo che* V *ammetta equazioni globali. Sia* K *un intorno compatto di* V *in* U *e sia* $f: U \to \mathbf{R}$ *una funzione* C^∞. *Supponiamo che esista una funzione* φ *analitica su un intorno di* K *tale che* $\varphi|_V = f|_V$. *È possibile allora approssimare uniformemente* f *su* K *con una successione di funzioni analitiche* $\{g_i\}$ *tali che* $g_i|_V = f|_V$ *per ogni* i.

Dimostrazione. Approssimare la funzione f equivale chiaramente ad approssimare la funzione $f - \varphi$. Possiamo quindi supporre $f|_V = 0$.

Sia $\mathcal{R}$ la relazione d'equivalenza fra i punti di K definita da:

$$x \mathcal{R} y \iff \begin{cases} x = y \\ x, y \in V. \end{cases}$$

Sia $X = K/\mathcal{R}$, $\pi: K \to X$ la proiezione e $v = \pi(V)$. X è uno spazio topologico compatto di Hausdorff.

Sia $C(X)$ l'algebra delle funzioni continue di X in $\mathbf{R}$. π induce una corrispondenza biunivoca π^* tra gli elementi di $C(X)$ e le funzioni continue su K che sono costanti su V.

Sia A l'algebra delle funzioni analitiche in un intorno di K che sono nulle su V. Sia $A' = \pi^{*-1}(A) \subset C(X)$.

A' è una sotto algebra di $C(X)$ che separa i punti; infatti presi comunque due punti distinti P, Q di X, $P \neq v$, $Q \neq v$, sia $\mathcal{S}$ il fascio delle funzioni ana-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1973.

litiche su U, U intorno di K, che sono nulle sui punti $\pi^{-1}(P)$ e $\pi^{-1}(Q)$ ($\mathfrak{S}$ è un fascio coerente di ideali). Sia $\mathfrak{J}$ il fascio coerente di ideali generato dalle equazioni globali di V. Il fascio $\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{S}$ è ovviamente coerente. Si ha la seguente successione esatta

$$0 \to \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{S} \to \mathcal{O}_U \to Q \simeq \mathcal{O}_V \oplus \mathbf{R} \oplus \mathbf{R} \to 0$$

ove con $\mathcal{O}_V$ si intende il fascio $\mathcal{O}_U/\mathfrak{J}$.

Per il teorema B (applicato all'aperto U) si ha:

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_U) \to \Gamma(U, Q) \to 0$$

è esatta quindi la tesi.

Per il teorema di Stone–Weierstrass la chiusura di A′ in C(X), con la topologia della convergenza uniforme, è la sottoalgebra di C(X) formata dalle funzioni che si annullano in v.

Consideriamo ora la funzione

$$f' = \pi^{*-1}(f) \in C(X)$$

$f'(v) = 0$ dunque $f' = \lim_i g'_i$ ove $\{g'_i\}$ è una successione in A′ uniformemente convergente ad f'.

Se $g_i = \pi^*(g'_i)$ si ha che la successione di funzioni analitiche $\{g_i\} \subset A$ converge uniformemente ad f.

OSSERVAZIONE. Il risultato sopra esposto è falso se si omette l'ipotesi che V abbia equazioni globali: ciò è provato dall'ultimo esempio di [1], in cui si considera un insieme analitico Σ di $\mathbf{R}^3$ compatto, con la proprietà che ogni funzione analitica reale $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ tale che $g|_\Sigma = 0$, si annulla identicamente.

Non è però possibile estendere completamente il teorema, nel senso di ottenere un'approssimazione della funzione f e delle sue derivate, neanche nel caso di uno spazio analitico non coerente, ma con equazioni globali. Questo è provato dal seguente esempio.

Sia X l'insieme analitico di $\mathbf{R}^3$ definito dall'equazione:

$$\varphi = x^2 - zy^2 = 0$$

X non è coerente nell'origine $(0, 0, 0)$.

Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ la funzione C^∞ così definita

$$f = f_1 \cdot f_2$$

ove $f_1(x, y, z) = x$ e f_2 è la funzione C^∞ «a campana» che vale 0 sul complementare della palla di centro $(0, 0, -2)$ e raggio 1, e vale 1 sulla palla di centro $(0, 0, -2)$ e raggio $1/2$.

È chiaro che

1) $f|_X = 0$

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0, -2) = 1.$

Sia g una funzione analitica in un intorno di X tale che $g|_X = 0$.

Sia $\tilde{g}$ l'estensione olomorfa di g a un intorno di $(0, 0, 0)$ in $\mathbf{C}^3$.

Poiché $g|_X = 0$, $\tilde{g}$ si deve annullare sul complessificato di X nell'origine, che ha la stessa equazione di X, letta in $\mathbf{C}^3$.

In altri termini, se $\mathfrak{J}(\tilde{X})$ è il fascio di ideali di $\mathcal{O}(\mathbf{C}^3)$ associato allo spazio complesso $\tilde{X}$, $\tilde{g} \in \mathfrak{J}(X)$.

Poiché $\mathfrak{J}(\tilde{X})$ è generato da φ, si deve avere

$$\tilde{g} = \tilde{h}\,\varphi$$

ove $\tilde{h}$ è una funzione olomorfa in un intorno di $(0, 0, 0)$ in $\mathbf{C}^3$ tale che $\tilde{h}(x, y, z) \in \mathbf{R}$ se $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

Dunque

$$g = \tilde{h}|_{\mathbf{R}^3}\,\varphi = h\varphi$$

e quindi

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(0, 0, -2) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)(0, 0, -2)\cdot\varphi(0, 0, -2) + \\ + h(0, 0, -2)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0, 0, -2) = 0\,.$$

Poiché questo vale per ogni funzione g analitica reale nulla su X, non è possibile approssimare le derivate di f con le derivate di una funzione analitica.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. CARTAN, *Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes*, « Bull. Soc. Math. France », 85, 77–99 (1957).

[2] A. TOGNOLI, *Un teorema di approssimazione relativo* (di prossima pubblicazione).