Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alvaro Gonzalez Villalobos

Teoremi limiti funzionali per sistemi moltiplicativi. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.3-4, p. 228–235.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_3-4_228_0>

Probabilità. — *Teoremi limiti funzionali per sistemi moltiplicativi.* Nota I (*) di ALVARO GONZÁLEZ VILLALOBOS, presentata dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this paper we prove some theorems on weak convergence in $(D, \mathfrak{D})$, —or $(C, \mathfrak{C})$—, of random elements X_m to a Gaussian process.

D denotes the set of real-valued functions defined on $[0, 1]$ that are right-continuous and have left-hand limits, $\mathfrak{D}$ the Skorohod σ-field in D (cfr. [3], p. 111), C the set of real-valued continuous functions on $[0, 1]$, and $\mathfrak{C}$ the σ-field that gives the uniform topology in C; moreover, $X_m \Rightarrow X$ will denote weak convergence.

The random elements X_m are constructed on the basis of the linear means of the series $S(w) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \psi_j(w)$, where $\{\psi_j\}$ is a uniformly bounded equinormed strongly multiplicative system.

These theorems generalize analogous results (cfr. [4]) valid for the case of a lacunary trigonometric series $S(w) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos n_j w$, with lacunarity $q \geq 3$.

1. La successione $\{\psi_n(x)\}$, $n = 1, 2, \cdots, x \in [0, 1]$, di funzioni reali misurabili costituisce un *sistema moltiplicativo* (cfr. [1], p. 186) se

$$\int_0^1 \psi_{n_1}(x) \cdots \psi_{n_k}(x)\, dx = 0 \quad \text{per} \quad n_1 < \cdots < n_k, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{1}$$

La successione $\{\psi_n(x)\}$ costituisce un *sistema equinormato fortemente moltiplicativo* (SEFM) se

$$\int_0^1 \psi_n(x)\, dx = 0 \quad , \quad \int_0^1 \psi_n^2(x)\, dx = 1 ; \tag{2}$$

$$\int_0^1 \psi_{n_1}^{v_1}(x) \cdots \psi_{n_k}^{v_k}(x)\, dx = \int_0^1 \psi_{n_1}^{v_1}(x)\, dx \cdots \int_0^1 \psi_{n_k}^{v_k}(x)\, dx \tag{3}$$

dove $n_1 < \cdots < n_k$, $k = 2, 3, \cdots$, e gli esponenti $v_1, \cdots, v_k$ hanno il valore 1 ovvero 2. Useremo anche successioni $\{\psi_n\}$ aventi la proprietà

$$\int_0^1 \psi_n^2(x)\, \psi_m^2(x)\, dx = 1 , \qquad n \neq m. \tag{4}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 7 settembre 1973.

II. Consideriamo ora un sistema moltiplicativo equinormato $\{\psi_n\}$, che sia complessivamente limitato ($|\psi_n| \leq K$) e soddisfi la (4); e cioè un sistema complessivamente limitato godente delle proprietà (1), (2) e (4). I due teoremi che seguono generalizzano considerevolmente un teorema del Móricz (cfr. [5], p. 45, Th. 1); l'idea direttiva delle dimostrazioni è la stessa (e ciò vale anche per la dimostrazione del teorema data dal Móricz) di quella di un teorema di Salem–Zygmund (cfr. [7], p. 57, Th. VIII) per serie lacunari.

TEOREMA 1. *Consideriamo una successione doppia* $\{b_{m,j}\}$, $m, j = 1, 2, \cdots$, *di numeri reali, tale che* $B_m = \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_{m,j}^2\right)^{1/2} < \infty$ *per ogni* m, *e definiamo* $\sigma_m(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_{m,j}\,\psi_j(x)$, $x \in [0, 1]$. *Ammettiamo anche che valgano le*

i) $B_m \xrightarrow{m\to\infty} \infty$; ii) $B_m^{-1} \sup_j |b_{m,j}| \xrightarrow{m\to\infty} 0$.

Allora, se $\lambda \in \mathbf{R}$, *abbiamo* [1]:

$$\lim_{m\to\infty} |\{x \in [0, 1] : B_m^{-1}\sigma_m(x) \leq \lambda\}| = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\lambda} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt .$$

Dimostrazione. Osserviamo che la serie $\sigma_m(x)$ converge quasi dappertutto, poiché $\sum_j b_{m,j}^2 < \infty$ (cfr. [2], p. 257, Th. 1). Denotiamo con $\varphi_m(x)$ la funzione caratteristica di $B_m^{-1}\sigma_m^{-1}(t)$. In virtù del teorema di continuità di P. Lévy, il Teorema 1 sarà dimostrato se riusciamo a stabilire la relazione

$$\varphi_m(x) = \int_0^1 \exp(ixB_m^{-1}\sigma_m(t))\, dt \xrightarrow{m\to\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right).$$

In vista di (ii) e della $\exp(z) = (1+z)\exp\left(\frac{1}{2}z^2 + o(|z|^2)\right)$, valida per $|z| \to 0$, abbiamo

$$\varphi_m(x) = \int_0^1 \exp(o(1)) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 B_m^{-2}\sum_j b_{m,j}^2\psi_j^2(t)\right)\prod_{j=1}^{\infty}(1 + ixB_m^{-1}b_{m,j}\psi_j(t))\, dt,$$

ove $o(1)$ denota un termine che tende a 0 uniformemente in t per $m \to \infty$. Osserviamo che

$$\left|\prod_{j=1}^{\infty}(1 + ixB_m^{-1}b_{m,j}\psi_j(t))\right| \leq \exp\left(\frac{1}{2}Kx^2\right);$$

da ciò segue che $\varphi_m(x)$ può esprimersi nella forma

$$\varphi_m(x) = o(1) + \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\xi_m(t)\right)\prod_{j=1}^{\infty}(1 + ixB_m^{-1}b_{m,j}\psi_j(t))\, dt,$$

(1) Col simbolo $|B|$ denotiamo la misura di Lebesgue dell'insieme B.

ove abbiamo scritto

$$\xi_m(t) = B_m^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} b_{m,j}^2 (\psi_j^2(t) - 1) .$$

Ammettiamo che sia $\eta > 0$; allora $|\{t \in [0, 1] : |\xi_m(t)| \geq \eta\}|$ ammette la maggiorazione

$$\eta^{-2} \int_0^1 \xi_m^2(t)\, dt \leq K^4 \eta^{-2} B_m^{-4} \sum_{j=1}^{\infty} b_{m,j}^4 \xrightarrow{m \to \infty} 0 ,$$

in conseguenza della (4) e dell'ipotesi (ii). Abbiamo pertanto $\xi_m \xrightarrow{m \to \infty} 0$ in misura; e da ciò segue

$$\varphi_m(x) = o(1) + \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right) \int_0^1 \prod_{j=1}^{\infty} (1 + ix B_m^{-1} b_{m,j} \psi_j(t))\, dt$$
$$= o(1) + \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right) .$$

TEOREMA 2. *Sia* $\{\psi_j\}$ *un SEFM complessivamente limitato,* $B_m = \left(\sum_{j=1}^{m} b_{m,j}^2\right)^{1/2}$, $m = 1, 2, \cdots$, *e definiamo* $\sigma_m(x) = \sum_{j=1}^{m} b_{m,j} \psi_j(x)$, $x \in [0, 1]$. *Ammettiamo inoltre che valgano le relazioni*

i) $B_m \xrightarrow{m \to \infty} \infty$; ii) $B_m^{-1} \max_{1 \leq j \leq m} |b_{m,j}| \xrightarrow{m \to \infty} 0$.

Allora, per ogni insieme $E \subset [0, 1]$ *di misura di Lebesgue positiva risulta*:

$$\lim_{m \to \infty} |E|^{-1} |\{x \in E : B_m^{-1} \sigma_m(x) \leq \lambda\}| = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\lambda} \exp\left(-\frac{1}{2} t^2\right) dt, \text{ per } \lambda \in \mathbf{R} .$$

COROLLARIO 2.1. *Sia* $\{a_j\}, j = 1, 2, \cdots$, *una successione di numeri reali, e poniamo* $A_m = \left(\sum_{j=1}^{m} a_j^2\right)^{1/2}$ *e* $B_m = \left(\sum_{j=1}^{m} a_j^2 \left(1 - \frac{j}{m+1}\right)^2\right)^{1/2}$. *Siano* $\sigma_m(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \left(1 - \frac{j}{m+1}\right) \psi_j(x)$ *le medie Cesàro-1 di* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j \psi_j(x)$, *ove* $\{\psi_j\}$ *è un SEFM complessivamente limitato. Ammettiamo che* $A_m \to \infty$, *e* $A_m^{-1} \max_{1 \leq j \leq m} |a_j| \xrightarrow{m \to \infty} 0$. *Allora, per ogni insieme* $E \subset [0, 1]$ *di misura di Lebesgue positiva, risulta*:

$$\lim_{m \to \infty} |E|^{-1} |\{x \in E : B_m^{-1} \sigma_m(x) \leq \lambda\}| = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\lambda} \exp\left(-\frac{1}{2} t^2\right) dt , \quad \lambda \in \mathbf{R} .$$

Il Corollario 2.1 è anche valido per le medie Cesàro-α di $\sum_{j=1}^{\infty} a_j \psi_j(x) \equiv S(x)$ se $\alpha \geq 0$. Nel caso $E \equiv [0, 1]$, basta considerare un sistema $\{\psi_j\}$ complessivamente limitato godente delle proprietà (1), (2) e (4); in questo caso, il corollario precedente è valido anche per le medie Abel di $S(x)$.

III. Consideriamo una serie $S(w) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \psi_j(w)$, $a_j \in \mathbf{R}$, ove $\{\psi_j\}$ è un SEFM complessivamente limitato. Scriveremo $A_m = \left(\sum_{j=1}^{m} a_j^2\right)^{1/2}$. Sia $\{\alpha_{m,j}\}$, $m, j = 0, 1, \cdots$, una successione doppia di numeri reali non negativi tale che $\alpha_{m,j} = 0$ se $j > m$. Ammettiamo che $\alpha_{m,j}$ sia decrescente quando j cresce, e che $\alpha_{m,j}$ sia crescente ed abbia il limite 1 per $m \to \infty$. Le medie lineari della serie $S(w)$ saranno scritte sotto la forma $\sigma_m(w) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{m,j} a_j \psi_j(w)$ per $m = 1, 2, \cdots$; $\sigma_0(w) \equiv 0$.

TEOREMA 3. *Poniamo* $A_m^* = \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{m,j}^2 a_j^2\right)^{1/2}$, $A_0^* = 0$, *ed inoltre* $X_m(w,t) = A_m^{*-1} \sigma_k(w)$ *per* $t \in [A_k^{*2} A_m^{*-2}, A_{k+1}^{*2} A_m^{*-2}]$, *ove* $k = 0, 1, \cdots, m$, $t \in [0, 1]$ *e* $w \in [0, 1]$. *Ammettiamo che valgano le condizioni*

i) $A_m \xrightarrow{m \to \infty} \infty$;

ii) $A_m^{-1} \max_{1 \le j \le m} |a_j| \xrightarrow{m \to \infty} 0$;

iii) $\Gamma_m(t_1, t_2) \equiv \int_0^1 X_m(w, t_1) X_m(w, t_2) \, dw \xrightarrow{m \to \infty} \Gamma(t_1, t_2) \in \mathbf{R}$ *per ogni* $t_1, t_2 \in [0, 1]$ e $\Gamma(t, t) = t$ *per* $t \in [0, 1]$.

Consideriamo in $([0, 1], \mathfrak{B})$ (2) *una misura di probabilità* P *assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue. Allora esiste un processo gaussiano* $\{X(\cdot, t) : 0 \le t \le 1\}$ *tale che* $X_m \Rightarrow X$ *in* $(D, \mathfrak{D})$.

Dimostrazione. Denotiamo con $(X_m(\cdot, t_1), \cdots, X_m(\cdot, t_p))$ l'applicazione $w \mapsto (X_m(w, t_1), \cdots, X_m(w, t_p)) \in \mathbf{R}^p$.

Dalle proprietà della successione $\alpha_{m,j}$ si conclude che, se $n \le m$ e

$$\sigma_m(w) - \sigma_n(w) \equiv \sum_{j=1}^{m} c_{m,n,j} \psi_j(w), \qquad \text{allora} \quad \sum_{j=1}^{m} c_{m,n,j}^2 \le A_m^{*2} - A_n^{*2}.$$

Si vede senza difficoltà che

$$(3.1) \qquad \int_0^1 |\sigma_m(w) - \sigma_n(w)|^4 \, dw \le K_1 \left(\sum_{j=1}^{m} c_{m,n,j}^2\right)^2 \le K_1 (A_m^{*2} - A_n^{*2})^2,$$

ove K_1 denota una costante indipendente da n e da m. Ammettiamo poi che

$$(3.2) \qquad P(B) = |B_0|^{-1} |B \cap B_0| \qquad \text{per ogni} \quad B \in \mathfrak{B},$$

ove B_0 sia un sottoinsieme fisso di $[0, 1]$, $|B_0| > 0$.

Allora dalla (3.1) e dalle disuguaglianze di Chebichev e di Hölder si ricava

$$(3.3) \qquad P(|\sigma_m - \sigma_n| \ge \lambda) \le Q\lambda^{-3} (A_m^{*2} - A_n^{*2})^{3/2}$$

(2) $\mathfrak{B}$ denota la famiglia dei borelliani.

per $\lambda > 0$, ove $Q = Q(|B_0|)$ denota una costante per tutti gli n, m tali che $0 \leq n \leq m$. Otteniamo, in conseguenza

$$(3.4) \qquad P(|\sigma_i - \sigma_j| \geq \lambda, |\sigma_j - \sigma_k| \geq \lambda) \leq Q\lambda^{-3}(A_k^{*2} - A_i^{*2})^{3/2}$$

ove $\lambda > 0$ e $0 \leq i \leq j \leq k$.

Dalla (3.4) vediamo che esiste una costante $K_2 = K_2(|B_0|)$ tale che

$$(3.5) \qquad P(\max_{i_1 \leq k \leq i_2} |\sigma_k - \sigma_{i_1}| \geq \lambda) \leq K_2 \lambda^{-3}(A_{i_2}^{*2} - A_{i_1}^{*2})^{3/2},$$

ove $\lambda > 0$, $0 \leq i_1 \leq i_2$ (cfr. [4], formula (1.2.19)).

Dalle ipotesi (i) e (ii) e dalla proprietà della $\alpha_{m,j}$ segue:

$$(3.6) \qquad (\mathrm{i}^*) \quad A_m^* \xrightarrow{m\to\infty} \infty ; \qquad (\mathrm{ii}^*) \quad A_m^{*-1} \max_{1\leq j\leq m} |a_j \alpha_{m,j}| \xrightarrow{m\to\infty} 0 .$$

Dalle (3.5), (3.6) si ricava che

$$(3.7) \qquad \{X_m\} \text{ è (una successione) «tight» in } (D, \mathfrak{D})$$

(cfr. [4], Lemma 2, Th. (1.2.1)).

Poniamo $b_{m,j} = a_j \alpha_{m,j}$ se $j \leq m$, e $b_{m,j} = 0$ se $j > m$. Dalla (3.6) si deduce che $b_{m,j}$ soddisfa le condizioni (i) e (ii) del Teor. 2. Poiché $P(X_m(\cdot, t) \leq x) = P(A_k^{*-1}\sigma_k(w) \leq x A_m^* A_k^{*-1})$, e $A_m^{*-2} A_k^{*2} \xrightarrow{m\to\infty} t$, il Teor. 2 implica che

$$(3.8) \qquad P(X_m(\cdot, t) \leq x) \xrightarrow{m\to\infty} N(0, t)[x]^{(3)} \qquad \text{per} \quad t \in [0, 1].$$

Se si tien conto della (iii), un' applicazione del teorema di Kolmogorov mostra che esiste un processo gaussiano $\{X(\cdot, t) : 0 \leq t \leq 1\}$, $X(\cdot, t) : (\Omega^*, \mathfrak{B}^*, P^*) \to (\mathbf{R}, \mathfrak{B})$ tale che $E(X(\cdot, t)) = 0$, e $\mathrm{Cov}(X(\cdot, t_1), X(\cdot, t_2)) = \Gamma(t_1, t_2)$. Inoltre, la varianza di $X(\cdot, t)$ è tale che $V(X(\cdot, t)) = \Gamma(t, t) = \lim_{m\to\infty} \Gamma_m(t, t) = t$.

Proveremo ora che, se $t_1, t_2, \cdots, t_p \in [0, 1]$,

$$(3.9) \qquad (X_m(\cdot, t_1), \cdots, X_m(\cdot, t_p)) \xRightarrow{m\to\infty} (X(\cdot, t_1), \cdots, X(\cdot, t_p)).$$

Infatti in conseguenza del teorema di Cramér–Wold, basterà stabilire che

$$\sum_{i=1}^{p} \xi_i X_m(\cdot, t_i) \xRightarrow{m\to\infty} \sum_{i=1}^{p} \xi_i X(\cdot, t_i)$$

(ov'è lecito ammettere che $t_1 < \cdots < t_p$) per $\xi_1, \cdots, \xi_p \in \mathbf{R}$; ossia,

$$(3.10) \qquad \sum_{i=1}^{p} \xi_i X_m(\cdot, t_i) \xRightarrow{m\to\infty} N(0, \sum_{i=1}^{p} \xi_i^2 t_i + 2 \sum_{1\leq i<h\leq p} \xi_i \xi_h \Gamma(t_i, t_h)).$$

(3) $N(E, V)[x]$ denota una distribuzione normale di media E e varianza V.

Se $X_m(w, t_i) = A_m^{*-1} \sigma_{k_i}(w)$ per $i = 1, \cdots, p$, possiamo scrivere il primo membro della (3.10) nella forma

$$\sum_{i=1}^{p} \xi_i X_m(w, t_i) = A_m^{*-1} \sum_{j=1}^{m} b_{m,j} \psi_j(w), \tag{3.11}$$

avendo assunto

$$b_{m,j} = a_j \sum_{i=1}^{p} \xi_i \alpha_{k_i,j} \quad \text{se } j \leq m, \qquad b_{m,j} = 0 \quad \text{se } j > m.$$

È facile verificare che la successione $\{b_{m,j}\}$ soddisfa le condizioni (i) e (ii) del Teor. 2 ed inoltre che

$$\lim_{m \to \infty} B_m^2 A_m^{*-2} = \sum_{i=1}^{p} \xi_i^2 t_i + 2 \sum_{1 \leq i < h \leq p} \xi_i \xi_h \Gamma(t_i, t_h). \tag{3.12}$$

Dal Teor. 2 e tenuto conto delle (3.11), (3.12) si conclude che è valida la (3.10), e pertanto anche la (3.9).

Dalle (3.9), (3.3), (3.4) scende che il processo gaussiano X può essere scelto in modo tale che $X \in D$ (cfr. [3], p. 130, Th. 15.7). Dalle (3.7), (3.9) deduciamo che, sotto l'ipotesi (3.2), è valida la relazione $X_m \Rightarrow X$ in $(D, \mathfrak{D})$. Abbiamo pertanto

$$|B_0 \cap \{X_m \in A\}| \xrightarrow{m \to \infty} P^*(X \in A) |B_0|, \tag{3.13}$$

per ogni $B_0 \in \mathfrak{B}$ e $A \in \mathfrak{D}$. Ciò prova che, per $A \in \mathfrak{D}$ fissato, la successione $\{X_m^{-1}(A)\}$ è « fortemente mescolante » (strongly mixing) con densità $P^*(X \in A)$.

Siccome P è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, la (3.13) implica la $P(X_m \in A) \xrightarrow{m \to \infty} P^*(X \in A)$ (cfr. [6], p. 216, Th. 1), e questo dimostra il teor. 3.

OSSERVAZIONE. Nel caso particolare $P \equiv$ misura di Lebesgue in $[0, 1]$, il teor. 3 è valido per un sistema complessivamente limitato $\{\psi_j\}$ godente soltanto delle proprietà (1), (2), (4) e tale che $\int_0^1 \psi_i^2 \psi_j \psi_k \, dw = 0$ per $i \neq j \neq k$. Infatti, nella dimostrazione che precede possiamo usare il Teor. 1 invece del Teor. 2, onde la (3.1) risulta valida per il suddetto sistema.

È ben noto che il processo di Wiener in $(D, \mathfrak{D})$, $W \equiv \{W_t(\cdot) : 0 \leq t \leq 1\}$ è caratterizzato dalle $E(W_t) = 0$ e $\mathrm{Cov}(W_t, W_u) = \min\{t, u\}$. Da queste proprietà e dal Teor. 3 ricaviamo il

COROLLARIO 3.1. *Se valgono le condizioni del Teor. 3 con l'ipotesi aggiuntiva* $\Gamma(t_1, t_2) = \min\{t_1, t_2\}$ *allora sussiste la* $X_m \Rightarrow W$ *in* $(D, \mathfrak{D})$.

Se $\alpha \geq 0$ e le $\sigma_m(w) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{m,j} a_j \psi_j(w)$ sono le medie Cesàro-α di $S(w) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \psi_j(w)$, allora $\alpha_{m,j} = [(1 + (m - j + 1)^{-1} \alpha) \cdots (1 + m^{-1} \alpha)]^{-1}$ soddisfa le condizioni richieste dal Teor. 3, esclusa la (iii).

COROLLARIO 3.2. *Sotto le ipotesi del Teor. 3, con esclusione della* (iii), *e se le* σ_m *designano le somme parziali di* $S(w) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \psi_j(w)$, *allora* $X_m \Rightarrow W$ *in* $(D, \mathfrak{D})$.

Infatti $\alpha_{m,j} = 1$ per $j \leq m$. Sia $X_m(w, t) = A_m^{-1} \sigma_r(w)$. Allora abbiamo $A_m^{-2} A_r^2 \xrightarrow{m \to \infty} t$ e $\Gamma_m(t, u) \xrightarrow{m \to \infty} \min\{t, u\}$, che è la condizione del Cor. 3.1.

Dal Corollario 3.1 scende tosto il

COROLLARIO 3.3. *Denotiamo con* $\sigma_m(w)$ *le medie Cesàro–1 di* $S(w)$, *ed ammettiamo che* $\frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n} j a_j^2 = o(A_n^2)$. *Allora, se sono valide le condizioni del Teor. 3, con esclusione della* (iii), *abbiamo* $X_m \Rightarrow W$ *in* $(D, \mathfrak{D})$.

Osserviamo che la tesi del Cor. precedente sussiste sotto l'ipotesi $a_n^2 = O(n^{-1})$, e anche se $a_n^2 = O(1/n \lg_1 n \cdots (\lg_p n)^\alpha)$, ove $0 \leq \alpha \leq 1$, $p = 1, 2, \cdots$, e $\lg_p$ denota il logaritmo naturale interato p volte.

Una formula esplicita per il processo limite che appare nel Teor. 3, per il caso delle medie Cesàro–α, con $\alpha > 0$, vien data dal teorema seguente (per la cui dimostrazione, cfr. [4], Th. (1.4.1)).

TEOREMA 4. *Colle notazioni del Teor. 3, siano* $\sigma_m(w)$ *le medie Cesàro–*α *di* $S(w)$, *con* $\alpha > 0$, *e sia* $|a_j| \equiv M \neq 0$. *Allora*:

$$X(\cdot, t) \equiv X_\alpha(\cdot, t) = \alpha(1 + 2\alpha)^{1/2} t^{-\alpha} \int_0^t W_x(\cdot)(t - x)^{\alpha - 1} dx$$

per $t > 0$, $X(\cdot, 0) \equiv 0$, *e pertanto* $X_\alpha(\cdot, t) \to W_t(\cdot)$ *per* $\alpha \downarrow 0$.

La dimostrazione del teorema che segue usa la stessa idea dianzi usata per il Teor. 3.

TEOREMA 5. *Sia* $\{\psi_j\}$ *una successione complessivamente limitata che soddisfi le condizioni* (1), (2), (4) *e tale che* $\int_0^1 \psi_i^2 \psi_j \psi_k \, dw = 0$ *se* $i \neq j \neq k$. *Poniamo, nel Teor. 3,* $P \equiv$ *misura di Lebesgue in* $[0, 1]$ *e, in luogo della condizione* $\alpha_{m,j} = 0$ *per* $j > m$, *ammettiamo che* $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{m,j} |a_j| < \infty$. *Allora la tesi del Teor. 3 sussiste, colle seguenti nuove definizioni di* $\sigma_m(w)$ *e di* A_m^*: $\sigma_m(w) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{m,j} a_j \psi_j(w)$, $A_m^* = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{m,j}^2 a_j^2\right)^{1/2}$.

OSSERVAZIONE. In particolare possiamo porre, nel Teor. 5, $\alpha_{m,j} = r_m^j$ ove $0 \leq r_m < 1$, con $r_m \uparrow 1$ per $m \to \infty$. In questo caso le $\sigma_m(w)$ risultano le medie Abel (con parametro discreto) di $S(w) = \sum a_j \psi_j(w)$.

Nel teorema che segue (per la cui dimostrazione cfr. [4], Th. (1.6.2.)) appaiono le medie Abel di $S(w)$ con un parametro continuo $r \in [0, 1)$.

TEOREMA 6. *Sia* $\sum_{j=1}^{\infty} r^j \,|\, a_j \,| < \infty$ *per* $r \in [0\,,\,1)$. *Sia* $\{\psi_j\}$ *una successione soddisfacente le stesse proprietà ammesse per la* $\{\psi_j\}$ *che appare nel Teor. 5. Scriviamo* $A_r^* = \left(\sum_{j=1}^{\infty} r^{2j} a_j^2\right)^{1/2}$, *e* $\sigma_r(w) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j r^j \psi_j(w)$. *Poniamo inoltre, per definizione,* $X_r(w\,,t) = A_r^{*-1}\,\sigma_s(w)$ *ove* $A_s^{*2}\,A_r^{*-2} = t$. *Ammettiamo poi che si verifichino le condizioni* (i) *e* (ii) *del Teor. 3, e che risulti*

$$\lim_{r\to 1} \int_0^1 X_r(w\,,t_1)\, X_r(w\,,t_2)\,\mathrm{d}w = \Gamma(t_1\,,t_2) \in \mathbf{R} \qquad se \quad t_1\,,t_2 \in [0\,,\,1]\,.$$

Sia P *la misura di Lebesgue in* $([0\,,\,1]\,,\mathfrak{B})$. *Allora esiste un processo gaussiano* $\{X(\cdot\,,t) : 0 \le t \le 1\}$ *tale che* $X_r \xRightarrow{r\to 1} X$ *in* $(C\,,\mathfrak{C})$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. ALEXITS, *Convergence problems of orthogonal series*, Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest 1961.

[2] G. ALEXITS e A. SHARMA, *On the convergence of multiplicatively orthogonal series*, « Acta Math. Acad. Sci. Hungar. », *22*, 257–266 (1971).

[3] P. BILLINGSLEY, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley, New York 1968.

[4] A. GONZÁLEZ VILLALOBOS, *Some functional limit theorems for dependent random variables*, The Annals of Probability (to appear).

[5] F. MÓRICZ, *The central limit theorem for multiplicative systems*, « Acta Math. Acad. Sci. Hungar. », *21*, 43–51 (1970).

[6] A. RÉNYI, *On mixing sequences of sets*, « Acta Math. Acad. Sci. Hungar. », *9*, 215–228 (1958).

[7] R. SALEM e A. ZYGMUND, *On lacunary trigonometric series*, « II, Proc. Nat. Acad. Sci. USA », *34*, 54–62 (1948).