Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Paolo Maroscia

Sugli anelli commutativi unitari in cui ogni ideale proprio è primo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.5, p. 322–324.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_5_322_0>

Algebra. — *Sugli anelli commutativi unitari in cui ogni ideale proprio è primo.* Nota di PAOLO MAROSCIA (*), presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. – In this paper, commutative rings with identity in which every (nonzero) proper ideal is prime are characterized.

Recentemente, è stata data in [3] una classificazione degli anelli commutativi unitari in cui ogni ideale proprio (1) è massimale, con l'uso di calcoli e verifiche dirette.

Scopo della presente Nota è quello di mostrare come, in base a semplici proprietà di topologia spettrale, si possa giungere rapidamente a caratterizzare, più in generale, gli anelli commutativi con unità in cui ogni ideale proprio è primo. Tuttavia, inaspettatamente, i risultati a cui così si perviene nelle ipotesi attuali, coincidono esattamente con quelli ottenuti in [3].

Cominciamo col provare il seguente:

LEMMA. *Sia* A *un anello commutativo unitario tale che ogni suo ideale proprio sia primo. Allora valgono le seguenti proprietà*:

1) *A possiede al più due ideali massimali*;

2) *se* A *è inoltre un dominio di integrità, esso risulta un campo.*

Dimostrazione. Infatti, se, per assurdo, la 1) non fosse vera, presi comunque in A due massimali distinti $\mathfrak{m}_1$ e $\mathfrak{m}_2$, si avrebbe (cfr. [1, Par. 4, n. 3]): $\{\mathfrak{m}_1\} \cup \{\mathfrak{m}_2\} = \mathrm{V}(\mathfrak{a}) \subset \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, dove $\mathfrak{a}$ è un certo ideale di A, il quale, in virtù delle ipotesi fatte, (cfr. [1, Cor. 2, p. 130]), risulta necessariamente l'ideale nullo, sicché: $\{\mathfrak{m}_1\} \cup \{\mathfrak{m}_2\} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$; ciò contraddice quanto si era supposto all'inizio, onde l'asserto.

Quanto alla 2), basta osservare che, fissato comunque in A un ideale proprio principale (2) $\mathfrak{p}$, avendosi certamente (cfr. [1]): $\mathrm{V}(\mathfrak{p}) = \mathrm{V}(\mathfrak{p}^2)$, risulterebbe, in virtù delle ipotesi fatte su A : $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$; ma ciò è assurdo, com'è subito visto, confrontando i generatori di $\mathfrak{p}$ e di $\mathfrak{p}^2$, giacché, per ipotesi, A è un dominio di integrità. Dunque, ogni elemento non nullo di A è invertibile e ciò basta per concludere.

(*) Attualmente borsista del C.N.R. presso l'Université de Paris-Sud (Orsay).
(**) Nella seduta del 26 novembre 1973.
(1) Ossia diverso dall'ideale nullo e dall'intero anello.
(2) Supposto esistente.

Poggiando sul Lemma, siamo in grado di dimostrare il risultato annunciato:

TEOREMA. *Sia* A *un anello commutativo con unità in cui ogni ideale proprio è primo. Allora necessariamente vale una delle due seguenti alternative*:

a) A *possiede un solo ideale massimale* $\mathfrak{m} \neq (0)$ (3): *in tal caso* $\mathfrak{m}$ *è l'unico ideale proprio* (4) *di* A *e si ha inoltre* $\mathfrak{m}^2 = (0)$;

b) A *possiede due ideali massimali distinti* $\mathfrak{m}_1$ *e* $\mathfrak{m}_2$: *in tal caso, l'omomorfismo* φ: $A \to A/\mathfrak{m}_1 \times A/\mathfrak{m}_2$, *definito in modo naturale, risulta un isomorfismo.*

Dimostrazione. Cominciamo col provare la a). Infatti, se, per assurdo, esistesse un ideale proprio $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, allora, tenendo presente (cfr. [1]) che $V(\mathfrak{p})$ risulta omeomorfo a $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{p})$ e applicando il Lemma, si giungerebbe ad una contraddizione; per concludere nel modo voluto, basta osservare che A risulta certamente un anello (locale) artiniano.

Nell'altro caso di cui in b), che è il solo ulteriormente possibile in base al Lemma, si ha senz'altro, in virtù ancora del Lemma, $\{\mathfrak{m}_1\} \cup \{\mathfrak{m}_2\} = \operatorname{Spec}(A)$, da cui, per le ipotesi fatte su A, $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 = (0)$; ma, d'altra parte, si ha anche: $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 = (1)$, onde l'asserto.

È subito visto che le due eventualità contemplate dal Teorema si presentano di fatto: basta pensare, per il primo caso, ad un anello del tipo: $k[T]/(T^2)$, essendo k un campo qualunque e T un'indeterminata, e, per l'altro caso, al prodotto diretto di due campi qualsiansi.

Dal Teorema e dalle considerazioni fin qui svolte, segue subito, (cfr. [3]), il seguente:

COROLLARIO. *Sia* A *un anello commutativo con unità. Allora le seguenti condizioni risultano fra loro equivalenti*:

α) *ogni ideale proprio di* A *è massimale*;

β) *ogni ideale proprio di* A *è primo*;

Osservazione. È opportuno notare che la condizione: « ogni ideale proprio di A è radicale (ossia coincide col proprio radicale) » non è equivalente a quelle riportate nel Corollario: basta pensare, per esempio, al prodotto diretto di un numero finito di campi qualsiansi. Tuttavia, la validità della parte 2) del Lemma rimane inalterata quando vi si adotti tale condizione, come si verifica subito ripetendo con ovvie varianti in questo caso la dimostrazione sopra sviluppata.

(3) È chiaro che, se fosse $\mathfrak{m} = (0)$, A risulterebbe un campo.

(4) È subito visto che $\mathfrak{m}$ risulta necessariamente principale.

Per finire, conviene rilevare che, da un punto di vista geometrico (cfr. [2]), il problema dianzi risolto equivale a quello di caratterizzare gli schemi affini in cui ogni sottoschema chiuso (proprio) è integro.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, Ch. 2. Hermann, Paris 1961.
[2] A. GROTHENDIECK e J. A. DIEUDONNÉ, *Eléments de Géométrie Algébrique*. I. Springer, Berlin 1971.
[3] F. I. PERTICANI, *Commutative rings in which every proper ideal is maximal*, « Fund. Math. », *71*, 193–198 (1971).