Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Manlio Bordoni

## Sulle classi caratteristiche di un fibrato di sfere

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **55** (1973), n.5, p. 404–414.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_5_404_0>

**Topologia algebrica.** — *Sulle classi caratteristiche di un fibrato di sfere* (*). Nota di MANLIO BORDONI, presentata (**) dal Corrisp. E. MARTINELLI.

SUMMARY. — A modification of the original definition of Stiefel-Whitney classes $w_i$ is given. A geometrical specification of the construction of Teleman's classes $t_i$, defined in [5], is also given. A direct proof of the equalities $t_i(\xi) = w_i(\eta)$ follows, when $\eta$, $\xi$ are a real vector bundle and the associated sphere bundle with antipodal involution.

## 1. INTRODUZIONE

1.1. In [5] N. Teleman ha definito certe classi caratteristiche dei «fibrati sferici con involuzione», che richiameremo in modo preciso in seguito (n. 2.2). Per ora ricordiamo che un fibrato sferico con involuzione è una quintupla $\xi = (S, \pi, B, S^{n-1}, A)$, dove:

$(S, \pi, B, S^{n-1})$ è un fibrato localmente banale, di spazio totale S, proiezione $\pi$, fibra la sfera $(n-1)$-dimensionale $S^{n-1}$, e base B paracompatta;

$A : S \to S$ è un'applicazione continua di S che conserva le fibre ed è involutoria, cioè tale che $A^2 = \mathbf{1}$.

Le classi definite in [5] sono classi di coomologia $t_i(\xi) \in H^i(B; \mathbf{Z}_2)$, $0 \leq i \leq n$. Viene provato in [5] che quando $(S, \pi, B, S^{n-1})$ è un fibrato associato ad un fibrato vettoriale $\eta = (E, \pi, B, \mathbf{R}^n)$, cosa che indichiamo scrivendo $\xi = S(\eta)$, ed A è l'involuzione antipodale, riesce

$$t_i(\xi) = w_i(\eta) \qquad \forall i, \quad 0 \leq i \leq n, \tag{1.1.1}$$

essendo $w_i(\eta)$ le classi di Stiefel–Whitney di $\eta$.

In questo lavoro presentiamo, da un lato, una modifica di una delle definizioni delle classi di Stiefel–Whitney (n. 3), e, d'altro lato, una specificazione geometrica della costruzione delle classi di Teleman (n. 4).

Ne deduciamo (n. 5) una dimostrazione diretta delle eguaglianze (1.1.1.).

1.2. *Notazioni*. Supporremo nel seguito che B sia un poliedro arbitrario; indicheremo con $B^{(p)}$, $0 \leq p < \infty$, lo scheletro di dimensione $p$ di B.

Sia $\eta = (E, \pi, B, \mathbf{R}^n)$ un fibrato vettoriale reale di dimensione $n$ (E sarà lo spazio totale di $\eta$, $\pi$ la proiezione e B la base). Supponiamo che $\eta$ sia munito di una metrica euclidea, ciò che non restringe la generalità; sia $S(\eta)$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R. Ringrazio il prof. N. Teleman per i consigli datimi nello svolgimento di questo lavoro.

(**) Nella seduta del 26 novembre 1973.

il fibrato di sfere associato ad $\eta$. Indicheremo con $E_b$, risp. $S(E_b)$, $b \in B$, la fibra di $\eta$, risp. di $S(\eta)$, su $b$. Se $\xi$ è un fibrato qualsiasi su B, $\xi^{(p)}$ rappresenterà la restrizione di $\xi$ allo scheletro $B^{(p)}$.

Se $\mathbf{1_R}$ rappresenta il fibrato prodotto di base $B^{(p)}$ e fibra $\mathbf{R}$, indicheremo con $s_p^{(0)} : B^{(p)} \to \eta \oplus \mathbf{1_R}$ la sezione definita da

$$s_p^{(0)}(b) = (0_b, 1) \in E_b \oplus \mathbf{R}, \qquad b \in B^{(p)}.$$

Se X è uno spazio topologico, con $\{C_p(X;G), \partial_p\}$ indicheremo il complesso delle catene singolari di X con coefficienti nel gruppo abeliano G.

## 2. RICHIAMI

2.1. *Classi* $w_i(\eta)$.

Per il fibrato vettoriale $\eta$ siano $W_r(\eta)$, $r = 1, \cdots, n$, i fibrati su B degli $r$–riferimenti. Le classi di Stiefel–Whitney $w_i(\eta)$, $i = 1, \cdots, n$, sono per definizione le ostruzioni modulo 2 all'esistenza di una sezione continua in $W_{n-i+1}(\eta)$ (vedi per esempio [3], pp. 56–59, e [4], pp. 148–149, 166–167, 178, 190–191); si pone $w_0(\eta) = 1$ per definizione.

2.2. *Classi* $t_i(\xi)$.

Dato il fibrato sferico con involuzione $\xi = (S, \pi, B, S^{n-1}, A)$, si consideri il fibrato sferico con involuzione, *sospensione* di $\xi$, $\Sigma\xi = (\bar{S}, \pi, B, S^n, A)$ in cui:

la fibra su $b \in B$ è la $n$–sfera $S_b^n = \Sigma S_b^{n-1} = S_b^{n-1} * S^0$, sospensione di $S_b^{n-1}$ (fibra su $b$ di $\xi$), ovvero « join » di $S_b^{n-1}$ e di una o–sfera $S^0$ (o, più esplicitamente, join $S_b^{n-1} * S_b^0$, essendo $S_b^0$ fibra su $b$ di $B \times S^0$);

l'involuzione A, fibra per fibra, è definita da:

$$A : S_b^{n-1} * S^0 \to S_b^{n-1} * S^0$$
$$(x, t, a_0) \mapsto (Ax, t, a_0'), \qquad x \in S_b^{n-1}, \; t \in [0, 1]$$

(avendo assunto $S^0 = \{a_0, a_0'\}$ ed $S_b^{n-1} * S^0 = C^{a_0} S_b^{n-1} \cup C^{a_0'} S_b^{n-1}$, dove il *cono* di vertice $a$ sullo spazio X è definito da

$$C^a X = \{(x, t, a) \mid x \in X, \; t \in [0, 1]\}/\sim$$

con $(x, t, a) \sim (y, t, a)$ se $t = 1$, $x$ e $y$ qualsiansi in X).

Per non appesantire la notazione, abbiamo indicato con A tanto l'involuzione di $\xi$ quanto quella di $\Sigma\xi$. Si noti che risulta, su ogni fibra $S_b^n$, $a_0' = Aa_0$; diremo $a_0$ $(= (a_0)_b)$ polo nord di $S_b^n$.

Nel fibrato $\Sigma\xi$ consideriamo la sezione canonica $s^{(0)}$ :

$$s^{(0)} : B \to \bar{S}$$
$$b \mapsto (x, 1, a_0), \qquad b \in B, \; x \in S_b^{n-1}$$

dei poli nord delle sfere $S_b^n = S_b^{n-1} * S^0$, e tramite questa definiamo la rappresentazione di catene $K^{(0)} = \{K_p^{(0)}\}$

$$(2.2.1) \qquad K_p^{(0)} : C_p(B ; \mathbf{Z}) \to C_p(\bar{S} ; \mathbf{Z})$$
$$\sigma_p \mapsto K_p^{(0)} \sigma_p = (\bar{s}^{(0)})_p \sigma_p ,$$

dove $\sigma_p$ è un simplesso singolare e con sopralineatura (per esempio $\bar{s}^{(0)}$, $\bar{A}$) indichiamo i morfismi indotti sui complessi di catene dalle corrispondenti applicazioni (per esempio $s^{(0)}$, A).

Si noti che essendo $A^2 = \mathbf{1}$ è anche $\bar{A}^2 = \mathbf{1}$.

Cerchiamo di definire induttivamente opportuni operatori

$$(2.2.2) \qquad K_p^{(r)} : C_p(B ; \mathbf{Z}) \to C_{p+r}(\bar{S} ; \mathbf{Z}) , \qquad r > 0 ,$$

tali che, se $\sigma_p \in C_p(B ; \mathbf{Z})$, si abbia

$$(2.3.3) \qquad (\mathbf{1} + (-1)^r \bar{A}) K_p^{(r-1)} \sigma_p = \partial K_p^{(r)} \sigma_p + (-1)^{r-1} K_{p-1}^{(r)} \partial\sigma_p ,$$

cioè

$$(2.2.4) \qquad \partial K_p^{(r)} \sigma_p = (\mathbf{1} + (-1)^r \bar{A}) K_p^{(r-1)} \sigma_p + (-1)^r K_{p-1}^{(r)} \partial\sigma_p .$$

La costruzione dei $K_p^{(r)}$ avviene per induzione doppia rispetto ad $r$ e $p$. In [5] N. Teleman verifica che gli operatori $K_p^{(r)}$ esistono finché $p + r \leq n$. Per $p + r = n + 1$ si ha un'ostruzione all'esistenza di $K_{n-r+1}^{(r)}$, rappresentata da una cocatena $\omega_{n-r+1}(\xi, \{K_p^{(r)}\}, \mathcal{H}_n)$, dipendente dal sistema di operatori $\{K_p^{(r)}\}$, definita su B e a valori nel sistema locale $\mathcal{H}_n$ dell'omologia $n$-dimensionale delle fibre $S_b^n$. Precisamente il valore di $\omega_{n-r+1}$ su un simplesso singolare di B è dato dalla:

$$(2.2.5) \qquad \omega_{n-r+1}(\sigma_{n-r+1}) = [(\mathbf{1} + (-1)^r \bar{A}) K_{n-r+1}^{(r-1)} \sigma_{n-r+1} + (-1)^r K_{n-r}^{(r)} \partial\sigma_{n-r+1}] \in$$
$$\in H_n(\sigma_{n-r+1} \times S^n ; \mathbf{Z}) , \cong \mathbf{Z} ,$$

dove con $\sigma_{n-r+1} \times S^n$ si denota sinteticamente il fibrato banale indotto di $\Sigma\xi$ mediante l'applicazione $\sigma_{n-r+1}$.

Sempre in [5] è stato provato che:

$$(2.2.6) \qquad \tilde{\omega}_{n-r+1} = \omega_{n-r+1} \qquad (\text{mod } 2)$$

è un cociclo, la cui classe non dipende dalla particolare scelta degli operatori $K_p^{(r)}$. Ebbene si pone:

$$(2.2.7) \qquad t_{n-r+1}(\xi) = [\tilde{\omega}_{n-r+1}] \in H^{n-r+1}(B ; \mathbf{Z}_2).$$

## 3. Definizione modificata delle classi di Stiefel–Whitney

3.1. Dalla teoria delle ostruzioni (vedi ad esempio [4], pp. 148–149, 166–167, e [6], pp. 65–71) è noto che nel fibrato $\eta^{(n-1)}$, restrizione di $\eta$ allo scheletro $B^{(n-1)}$, esiste una sezione continua di norma 1 in ogni punto, che indicheremo con $s^{(1)}$, ma, in generale, la sezione $s^{(1)}$ non si può estendere ad una sezione nel fibrato $\eta^{(n)}$. Poniamo $\eta_1 = \eta^{(n)}$. Sia $\eta_2$ il fibrato vettoriale di dimensione $n - 1$ su $B^{(n-1)}$, complemento ortogonale alla sezione $s^{(1)}$ in $\eta_1^{(n-1)}$ (restrizione a $B^{(n-1)}$ di $\eta_1$). Lo stesso argomento ci dice che per il fibrato $\eta_2$ di dimensione $n - 1$ esiste una sezione unitaria $s^{(2)}$ definita su $B^{(n-2)}$, cioè una sezione del fibrato ristretto $\eta_2^{(n-2)}$. Così procedendo per induzione rispetto ad $r$, costruiremo i fibrati vettoriali $\eta_r$ e le sezioni $s^{(r)}$ tali che $\eta_r$ è un fibrato vettoriale di dimensione $n - r + 1$ su $B^{(n-r+1)}$ ed $s^{(r)}$ è una sezione unitaria su $B^{(n-r)}$ in $\eta_r^{(n-r)}$; la coppia $(\eta_{r+1}, s^{(r+1)})$ sarà definita così: $\eta_{r+1}$ è il complemento ortogonale di $s^{(r)}$ in $\eta_r^{(n-r)}$ su $B^{(n-r)}$ ed $s^{(r+1)}$ sarà una sezione unitaria su $B^{(n-r-1)}$ in $\eta_{r+1}^{(n-r-1)}$.

In generale, le sezioni $s^{(r)}$ non possono essere estese a $B^{(n-r+1)}$; l'ostruzione è data da un cociclo di dimensione $n - r + 1$ su $B^{(n-r+1)}$ con coefficienti locali definiti dai gruppi di omologia $H_{n-r}(V_b - \{0\}; \mathbf{Z})$, dove $V_b$, $b \in B^{(n-r+1)}$, è la fibra di $\eta_r$ in $b$. Tale cociclo, che indicheremo con $\varphi_{n-r+1}$, risulta definito dai valori

$$(3.1.1)\qquad \varphi_{n-r+1}(\sigma_{n-r+1}) = [\bar{s}^{(r)}\,\partial\sigma_{n-r+1}] \in H_{n-r}(\sigma_{n-r+1}\times(\mathbf{R}^{n-r+1} - \{0\}); \mathbf{Z}) \quad (\cong \mathbf{Z})$$

dove $\sigma_{n-r+1}$ è un simplesso singolare su $B^{(n-r+1)}$, $\bar{s}^{(r)}$ indica al solito la rappresentazione di catene indotta da $s^{(r)}$ e col simbolo $\sigma_{n-r+1}\times(\mathbf{R}^{n-r+1} - \{0\})$ si denota il fibrato indotto mediante l'applicazione $\sigma_{n-r+1}$ similmente a quanto detto per la (2.2.5).

Ebbene, riducendo i valori di $\varphi_{n-r+1}$ modulo 2, cioè considerando

$$(3.1.2)\qquad \tilde{\varphi}_{n-r+1} = \varphi_{n-r+1} \pmod 2,$$

si ottiene un ordinario cociclo su $B^{(n-r+1)}$ a valori nel gruppo costante $\mathbf{Z}_2$.

Considerata l'inclusione $i : B^{(n-r+1)} \to B$, l'omomorfismo indotto sui corrispondenti gruppi di coomologia:

$$i^* : H^{n-r+1}(B; \mathbf{Z}_2) \to H^{n-r+1}(B^{(n-r+1)}; \mathbf{Z}_2)$$

è un monomorfismo, come risulta ovviamente per esempio dalla considerazione della successione esatta della coppia simpliciale $(B, B^{(n-r+1)})$. Pertanto è ben individuata una classe di coomologia

$$v_{n-r+1}(\eta) \in H^{n-r+1}(B; \mathbf{Z}_2)$$

tale che

$$(3.1.3)\qquad i^* v_{n-r+1} = [\tilde{\varphi}_{n-r+1}] \in H^{n-r+1}(B^{(n-r+1)}; \mathbf{Z}_2).$$

Proviamo che:

(3.1.4) PROPOSIZIONE. *Le classi di Stiefel-Whitney coincidono con le classi ora definite, cioè*

$$(3.1.5)\qquad w_i(\eta) = v_i(\eta), \qquad i = 0, 1, \cdots, n.$$

*Dimostrazione*. Della definizione di $v_i(\eta)$ risulta intanto

$$i^* v_{n-r+1}(\eta) = w_{n-r+1}(\eta_r)$$

dove $\eta_r$ è un fibrato di dimensione $n-r+1$ su $B^{(n-r+1)}$ tale che

$$i^* \eta = \eta^{(n-r+1)} \cong \eta_r \oplus \mathbf{1_R} \oplus \cdots \oplus \mathbf{1_R}$$

(i termini $\mathbf{1_R}$ essendo in numero di $r-1$).

Abbiamo, per la funtorialità delle classi di Stiefel–Whitney,

$$w_{n-r+1}(i^* \eta) = i^* w_{n-r+1}(\eta)$$

e per la loro stabilità

$$w_{n-r+1}(i^* \eta) = w_{n-r+1}(\eta_r \oplus \mathbf{1_R} \oplus \cdots \oplus \mathbf{1_R}) = w_{n-r+1}(\eta_r) = i^* v_{n-r+1}(\eta)$$

dunque

$$i^* w_{n-r+1}(\eta) = i^* v_{n-r+1}(\eta) .$$

Poiché $i^*$ è un monomorfismo, si conclude con la (3.1.5.).

## 4. Costruzione degli operatori $K_p^{(r)}$ tramite sezioni ortonormali

4.1. Se il fibrato sferico $\xi$ è associato al fibrato vettoriale $\eta$, ed A è l'involuzione antipodale, il fibrato sferico $\Sigma\xi$ definito in 2.2 è associato al fibrato vettoriale $\eta \oplus \mathbf{1_R}$ ed è anch'esso munito dell'involuzione antipodale ($\mathbf{1_R}$ indica al solito il fibrato banale lineare di base B). Sia $S(\eta \oplus \mathbf{1_R})$ lo spazio totale del fibrato $\Sigma\xi$.

Consideriamo la $(r+1)$–sfera

$$S^{r+1} = S^r * S^0 , \qquad 0 \leq r < \infty , \qquad S^0 = \{-1 , +1\}$$

e sia $A : S^r \to S^r$ l'involuzione antipodale; con lo stesso A indicheremo l'involuzione indotta da A in $S^{r+1}$ (cfr. n. 2.2).

Costruite le sezioni $s^{(r)}$, $1 \leq r \leq n$, del n. 3 e la sezione canonica (cfr. n. 1.2)

$$s^{(0)} : B \to \eta \oplus \mathbf{1_R}$$

definita da

$$s^{(0)}(b) = (0_b , 1) \in (\eta \oplus \mathbf{1_R})_b , \qquad b \in B$$

(si noti che $s^{(0)}$ è sostanzialmente la stessa sezione definita nel n. 2.2), siano $h_q^{(r)}$ le applicazioni continue

(4.1.1) $$h_q^{(r)} : B^{(q)} \times S^r \to S(\eta^{(q)} \oplus \mathbf{1_R}) , \qquad q + r \leq n ,$$

ove $\eta^{(q)}$ è la restrizione del fibrato $\eta$ allo scheletro $B^{(q)}$, definite per induzione rispetto ad $r$ come segue:

*a*) $h_q^{(0)}(b , \varepsilon) = \varepsilon s^{(0)}(b)$ per $b \in B^{(q)}$, $\varepsilon = \pm 1 \in S^0$ $(= S_b^0)$;

*b*) supposto di aver costruito $h_q^{(r)}$, $q + r + 1 \leq n$, definiamo

$$h_q^{(r+1)} : B^{(q)} \times (S^r * S^0) \to S(\eta^{(q)} \oplus \mathbf{1_R})$$

ponendo

$$h_q^{(r+1)}(b,(x,t,\varepsilon)) = \left(\cos\frac{\varepsilon\pi t}{2}\right) h_q^{(r)}(b,x) + \left(\operatorname{sen}\frac{\varepsilon\pi t}{2}\right) s^{(r+1)}(b) \tag{4.1.2}$$

per $b \in B^{(q)}$, $x \in S^r$ $(=S_b^r)$, $0 \le t \le 1$, $\varepsilon = \pm 1 \in S^0$ $(=S_b^0)$.

Le applicazioni $h_q^{(r)}$ hanno le seguenti proprietà:

(i) $$h_q^{(r)}(B^{(q)} \times S^r) \subset S(\overline{\eta}_r^{(q)} \oplus \mathbf{1_R}),$$

in cui $\overline{\eta}_r^{(q)}$ è il sottofibrato di dimensione $r$ di $\eta^{(q)}$ individuato dalle sezioni $s^{(1)},\cdots,s^{(r)}$ (con i simboli del n. 3.1 $\overline{\eta}_r^{(q)}$ è il complemento ortogonale di $\eta_{r+1}^{(q)}$ in $\eta^{(q)}$);

(ii) rispetto all'inclusione canonica sull'equatore $i_r: S^r \to S^{r+1}$, le applicazioni $h_q^{(r+1)}$ estendono le applicazioni $h_q^{(r)}$, $q+r+1 \le n$;

(iii) $$h_q^{(r)} A = A h_q^{(r)};$$

(iv) $$h_q^{(r)}(b, e^i) = h_q^{(i)}(b, e^i) = s^{(i)}(b), \qquad r \ge i,$$

essendo $e^i$ il punto $+1$ del fattore $i$–mo del join di $r+1$ copie di $S^0$: $S^0 * \cdots * S^0 = S^r$.

4.2. Mostreremo ora come, sulla base delle applicazioni continue $h_q^{(r)}$, possiamo arrivare a costruire operatori $\overset{(q)}{K}{}_p^{(r)}$ soddisfacenti alle condizioni indicate al n. 2.2 per gli operatori $K_p^{(r)}$, con riguardo però, anziché al fibrato di base B, ai fibrati di base gli scheletri $B^{(q)}$ di B, precisamente $\overset{(q)}{K}{}_p^{(r)}$ definisce un omomorfismo di grado $r$

$$\overset{(q)}{K}{}_p^{(r)}: C_p(B^{(q)};\mathbf{Z}) \to C_{p+r}(S(\eta^{(q)} \oplus \mathbf{1_R});\mathbf{Z}). \tag{4.2.1}$$

A tale scopo costruiremo prima operatori

$$\overset{(q)}{H}{}_p^{(r)}: C_p(B^{(q)};\mathbf{Z}) \to C_p(B^{(q)};\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} C_r(S^r;\mathbf{Z}) \tag{4.2.2}$$

che comporremo successivamente con l'equivalenza omotopica di Eilenberg–Zilber (vedi ad esempio [1], pp. 193–194)

$$\theta: C_*(B^{(q)};\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} C_*(S^r;\mathbf{Z}) \to C_*(B^{(q)} \times S^r;\mathbf{Z}) \tag{4.2.3}$$

e con l'omomorfismo

$$\bar{h}_q^{(r)}: C_{p+r}(B^{(q)} \times S^r;\mathbf{Z}) \to C_{p+r}(S(\eta^{(q)} \oplus \mathbf{1_R});\mathbf{Z}) \tag{4.2.4}$$

indotto da $h_q^{(r)}$ in dimensione $p+r$.

Cominciamo col definire $\overset{(q)}{H}{}_p^{(r)}$ nel modo seguente:

$$\begin{cases} \overset{(q)}{H}{}_p^{(0)}(\sigma_p) = \sigma_p \otimes (e^0) \\ \overset{(q)}{H}{}_p^{(r)}(\sigma_p) = (-1)^{pr+\frac{r(r+1)}{2}} \sigma_p \otimes ((\mathbf{1}-A)e^0 * \cdots * (\mathbf{1}-A)e^{r-1} * e^r), \quad r \ge 1, \end{cases} \tag{4.2.5}$$

dove $\sigma_p$ è un $p$–simplesso singolare su $B^{(q)}$, $\otimes$ è l'ordinario prodotto tensoriale, $*$ rappresenta il join di catene ed $e^i$, $Ae^i$ sono rispettivamente i punti $+1$, $-1$ del fattore $i$–mo del join di più copie di $S^0$ di cui al n. 4.1 (1).

Gli operatori (4.2.1) sono dunque così definiti:

$$\overset{(q)}{K}{}_p^{(r)} = \bar{h}_q^{(r)} \circ \theta \circ \overset{(q)}{H}{}_p^{(r)} . \tag{4.2.6}$$

Per verificare le condizioni del n. 2.2, cominciamo con l'osservare che l'involuzione A del fibrato $B^{(q)} \times S^r$ induce, tramite l'inversa omotopica $\theta^{-1}$ della $\theta$, (4.2.3), l'involuzione

$$\bar{A} : C_*(B^{(q)} ; \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} C_*(S^r ; \mathbf{Z}) \to C_*(B^{(q)} ; \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} C_*(S^r ; \mathbf{Z}) \ \text{(2)}, \tag{4.2.7}$$

definita dalla:

$$\bar{A}\,(\sigma_i \otimes \sigma_j) = \sigma_i \otimes \bar{A}\sigma_j \tag{4.2.8}$$

$\sigma_i$, $\sigma_j$ essendo rispettivamente un $i$–simplesso singolare su $B^{(q)}$ ed un $j$–simplesso singolare su $S^r$.

Ricordando come opera $\partial$ nei confronti degli operatori $\otimes$ e $*$ (cfr. per esempio [1], pp. 193–194, e [2], p. 139):

$$\partial\,(\sigma_i \otimes \sigma_j) = \partial\sigma_i \otimes \sigma_j + (-1)^i\, \sigma_i \otimes \partial\sigma_j , \qquad (\sigma_i , \sigma_j \text{ simplessi singolari}) \tag{4.2.9}$$

e

$$\left\{\begin{aligned} &\partial\,(s_i * s_j) = \partial s_i * s_j + (-1)^{i+1}\, s_i * \partial s_j , && i , j \geq 1 \\ &\partial\,(s_0 * s_j) = s_j - s_0 * \partial s_j && (s_i , s_j \text{ simplessi affini}) \\ &\partial\,(s_i * s_0) = \partial s_i * s_0 + (-1)^{i+1}\, s_i , && \end{aligned}\right. \tag{4.2.10}$$

si verifica con un facile calcolo l'identità:

$$(\mathbf{1} + (-1)^r \bar{A})\, \overset{(q)}{H}{}_p^{(r-1)} = \partial \overset{(q)}{H}{}_p^{(r)} + (-1)^{r-1} \overset{(q)}{H}{}_{p-1}^{(r)} \partial . \tag{4.2.11}$$

Poiché $\bar{h}_q^{(r)}$ e $\theta$ sono rappresentazioni di catene, la (4.2.11) si muta, in virtù di (4.2.6), nella:

$$(\mathbf{1} + (-1)^r \bar{A})\, \overset{(q)}{K}{}_p^{(r-1)} = \partial \overset{(q)}{K}{}_p^{(r)} + (-1)^{r-1} \overset{(q)}{K}{}_{p-1}^{(r)} \partial . \tag{4.2.12}$$

Tenuto poi conto delle (4.2.5), (4.1.1), $a$), si ottiene:

$$\overset{(q)}{K}{}_p^{(0)} = (\bar{s}^{(0)})_p . \tag{4.2.13}$$

(1) Naturalmente la catena $((\mathbf{1} - A)\, e^0 * \cdots * (\mathbf{1} - A)\, e^{r-1} * e^r)$ va considerata come catena singolare di $S^r$ corrispondente all'omonima catena simpliciale della decomposizione di tipo ottaedrale di $S^r$. È ovvio che il sostegno della catena di cui trattasi è una semi–$S^r$.

(2) Per semplicità indichiamo con lo stesso simbolo $\bar{A}$ la rappresentazione di catene involutoria, indotta da A, sia su $C_*(S^r ; \mathbf{Z})$ sia sul complesso di catene prodotto tensoriale che compare in (4.2.7). Si avverta perciò che nei due membri della successiva (4.2.8), $\bar{A}$ ha due significati diversi.

Si è così provato che gli operatori $\overset{(q)}{K}{}_p^{(r)}$, *per ogni fissato* $q$, soddisfano alle condizioni del n. 2.2, e sono quindi adatti alla costruzione delle classi caratteristiche $t_i$ del fibrato sferico con involuzione $\xi^{(q)}$, restrizione allo scheletro $B^{(q)}$ del fibrato sferico $\xi$ associato al fibrato vettoriale $\eta$.

## 5. EGUAGLIANZA $w_i(\eta) = t_i(\xi)$

5.1. Nel n. 3.1 abbiamo costruito un sistema di sezioni $s^{(r)}$ e sottofibrati $\eta_r$ del fibrato vettoriale $\eta$, le quali hanno portato alla definizione del cociclo $\varphi_{n-r+1}$, (3.1.1), a valori nel sistema dei coefficienti locali definiti dai gruppi di omologia

$$(5.1.1) \qquad H_{n-r}(\sigma\times(\mathbf{R}^{n-r+1}-\{0\});\mathbf{Z}) = H_{n-r}(\sigma\times S^{n-r};\mathbf{Z})$$

dove, d'ora in poi, $\sigma$ indicherà un $(n-r+1)$–simplesso singolare di $B^{(n-r+1)}$.

Utilizzando le sezioni $s^{(r)}$ abbiamo poi costruito (n. 4) un sistema di operatori $\overset{(q)}{K}{}_p^{(r)}$ che permette la definizione delle classi $t_i$ del fibrato sferico con involuzione $\xi^{(q)}$. In particolare, per $q = n-r+1$, gli operatori $\overset{(q)}{K}{}_p^{(r)}$, che indichiamo brevemente con $K_p^{(r)}$, portano dunque a definire una cocatena (vedi la (2.2.5) adattata al caso attuale)

$$(5.1.2) \qquad \omega'_{n-r+1}$$

con valori nel sistema di coefficienti locali definiti dai gruppi di omologia

$$(5.1.3) \qquad H_n(\sigma\times S^n;\mathbf{Z}).$$

Ora osserviamo che:

(5.1.4) LEMMA. *I due sistemi locali di coefficienti definiti da* (5.1.1), (5.1.3), *sono canonicamente isomorfi.*

*Dimostrazione.* Consideriamo la $n$–sfera della (5.1.3): essa è la fibra, su un punto $b \in B^{(n-r+1)}$, del fibrato di sfere associato al fibrato vettoriale $\eta^{(n-r+1)} \oplus \mathbf{1_R}$ ($\eta^{(n-r+1)}$ indica al solito la restrizione del fibrato $\eta$ allo scheletro $B^{(n-r+1)}$) e la indicheremo perciò con $S_b^n$. A sua volta la $(n-r)$–sfera $S^{n-r}$ della (5.1.1) è la fibra $S_b^{n-r}$ in $b$ del fibrato di sfere associato al fibrato vettoriale $\eta_r$ di dimensione $n-r+1$ su $B^{(n-r+1)}$ definito nel n. 3.1. Si ricordi che (n. 3.1):

$$\eta^{(n-r+1)} = \eta_r \oplus \mathbf{1_R} \oplus \cdots \oplus \mathbf{1_R}$$

i termini $\mathbf{1_R}$ essendo in numero di $r-1$, corrispondendo ciascuno di essi ad una sezione $s^{(i)}$, $i = 1,\cdots,r-1$.

Possiamo allora identificare $S_b^{n-r} * S^{r-1}$ con $S_b^n$ tramite l'omeomorfismo

$$(5.1.5) \qquad L^{r-1} : S_b^{n-r} * S^{r-1} \to S_b^n$$

definito dalla

$$L^{r-1}(x, t, y) = \left(\cos\frac{\pi t}{2}\right) h^{(r-1)}(b, y) + \left(\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2}\right) x \tag{5.1.6}$$

con $x \in S_b^{n-r}$, $0 \leq t \leq 1$, $y \in S^{r-1}$, $b \in B^{(n-r+1)}$; $h^{(r-1)}$ $(= h_{n-r+1}^{(r-1)})$ è l'applicazione continua definita nel n. 4.1.

In particolare riesce (cfr. la (4.1.2) e la successiva (iv)):

$$L^{r-1}(x, 0, e^i) = s^{(i)}(b), \qquad i = 0, 1, \cdots, r-1$$

per $b \in B^{(n-r+1)}$, $x \in S_b^{n-r}$; le $s^{(i)}$ sono le sezioni considerate nel n. 4.1 mentre $e^i$ è, come nel n. 4.1, il punto $+1$ del fattore $i$–mo del join di $r$ copie di $S^0$: $S^0 * \cdots * S^0 = S^{r-1}$.

Ciascuna $n$–sfera $S_b^{n-r} * S^{r-1} = S_b^{n-r} * \{e^0, Ae^0\} * S^{r-2}$ si decompone in due calotte $S_b^{n-r} * e^0 * S^{r-2}$ e $S_b^{n-r} * Ae^0 * S^{r-2}$; tramite l'omeomorfismo $L^{r-1}$ anche $S_b^n$ si decompone in due calotte. In tal modo si ottiene una decomposizione di $\sigma \times S^n$. Poiché $\sigma$ è contraibile, l'omomorfismo di collegamento $\nabla$ della successione di Mayer–Vietoris associata alla data decomposizione di $\sigma \times S^n$ (vedi ad esempio [1], p. 74) è un isomorfismo

$$\nabla : H_n(\sigma \times S^n ; \mathbf{Z}) \to H_{n-1}(\sigma \times S^{n-1} ; \mathbf{Z}) \tag{5.1.7}$$

(si noti che, per costruzione, $S^{n-1}$ è la fibra del fibrato sferico associato al fibrato vettoriale $\eta$).

Applicando lo stesso procedimento a partire dalla $(n-1)$–sfera $S_b^{n-r} * S^{r-2} = S_b^{n-r} * \{e^1, Ae^1\} * \cdots * \{e^{r-1}, Ae^{r-1}\}$, prima rispetto ad $e^1$, poi $e^2$, e così via fino ad $e^{r-1}$, si ottengono altri $r-1$ isomorfismi del tipo (5.1.7), componendo i quali si ha l'isomorfismo

$$\nabla^r : H_n(\sigma \times S^n ; \mathbf{Z}) \to H_{n-r}(\sigma \times S^{n-r} ; \mathbf{Z}) \tag{5.1.8}$$

che dà l'equivalenza canonica dei sistemi locali annunciata.

5.2. In base al Lemma (5.1.4), possiamo identificare i sistemi di valori (o coefficienti) delle cocatene $\varphi_{n-r+1}$ e $\omega'_{n-r+1}$ di cui al n. 5.1.

In questa intesa stabiliamo che le cocatene $\varphi_{n-r+1}$ e $\omega'_{n-r+1}$, con valori ridotti modulo 2 e quindi variabili nel gruppo $\mathbf{Z}_2$ fisso, coincidono. Si ha cioè:

(5.2.1) TEOREMA. $\varphi_{n-r+1} = \omega'_{n-r+1} \pmod 2$.

*Dimostrazione*. Proveremo il Teorema stabilendo che per ogni $(n-r+1)$–simplesso singolare $\sigma$ di $B^{(n-r+1)}$ riesce

$$\nabla^r \omega'_{n-r+1}(\sigma) = \pm \varphi_{n-r+1}(\sigma), \tag{5.2.2}$$

dove il segno dipende soltanto da $r$; $\nabla^r$ è l'isomorfismo (5.1.8).

Intanto, per la definizione di $\omega'_{n-r+1}$ (vedi la (2.2.5)), si ha:

$$\omega'_{n-r+1}(\sigma) = [(\mathbf{1} + (-1)^r \bar{A}) K_{n-r+1}^{(r-1)} \sigma + (-1)^r K_{n-r}^{(r)} \partial\sigma] \in H_n(\sigma \times S^n ; \mathbf{Z}). \tag{5.2.3}$$

Denotiamo con $\Omega_{n-r+1}(\sigma)$ lo $n$–ciclo di $\sigma \times S^n$ che compare a secondo membro della (5.2.3). In base alle (4.2.6) e (4.2.5) si ha

$$(5.2.4) \qquad \Omega_{n-r+1}(\sigma) = (\mathbf{1} + (-1)^r \bar{A})\, K^{(r-1)}_{n-r+1}\,\sigma + (-1)^r K^{(r)}_{n-r}\,\partial\sigma =$$

$$= (-1)^{\frac{(2n-r+3)r}{2}} \Big((-1)^{n+1} \bar{h}^{(r-1)}\, \theta(\sigma \otimes ((\mathbf{1}-A)\, e^0 * \cdots * (\mathbf{1}-A)\, e^{r-1})) +$$

$$+ \bar{h}^{(r)}\, \theta(\partial\sigma \otimes ((\mathbf{1}-A)\, e^0 * \cdots * (\mathbf{1}-A)\, e^{r-1} * e^r))\Big) .$$

Consideriamo la decomposizione di $\sigma \times S^n$ introdotta nel n. 5.1, indotta dalla decomposizione di $S^{n-r}_b * \{e^0, Ae^0\} * S^{r-2}$ nelle due calotte $S^{n-r}_b * e^0 * S^{r-2}$, $S^{n-r}_b * Ae^0 * S^{r-2}$. Tramite tale decomposizione, il ciclo $\Omega_{n-r+1}(\sigma)$ si scompone nelle due seguenti catene:

$$(5.2.5) \qquad \alpha = (-1)^{\frac{(2n-r+3)r}{2}} \Big((-1)^{n+1} \bar{h}^{(r-1)}\, \theta(\sigma \otimes (e^0 * (\mathbf{1}-A)\, e^1 * \cdots * (\mathbf{1}-A)\, e^{r-1})) +$$

$$+ \bar{h}^{(r)}\, \theta(\partial\sigma \otimes (e^0 * (\mathbf{1}-A)\, e^1 * \cdots * (\mathbf{1}-A)\, e^{r-1} * e^r))\Big) ,$$

$$\beta = (-1)^{\frac{(2n-r+3)r}{2}} \Big((-1)^{n} \bar{h}^{(r-1)}\, \theta(\sigma \otimes (Ae^0 * (\mathbf{1}-A)\, e^1 * \cdots * (\mathbf{1}-A)\, e^{r-1})) -$$

$$- \bar{h}^{(r)}\, \theta(\partial\sigma \otimes (Ae^0 * (\mathbf{1}-A)\, e^1 * \cdots * (\mathbf{1}-A)\, e^{r-1} * e^r))\Big) .$$

Nel nostro caso, tenuto conto di come agisce il bordo $\partial$ nei confronti di $\otimes$ e $*$, (4.2.9) e (4.2.10), l'isomorfismo (5.1.7) dà:

$$(5.2.6) \qquad \nabla\omega'_{n-r+1}(\sigma) = \nabla\,[\Omega_{n-r+1}(\sigma)] = [\partial\alpha] =$$

$$= (-1)^{\frac{(2n-r+3)r}{2}} \Big[\bar{h}^{(r-1)}\, \theta((-1)^r \sigma \otimes ((\mathbf{1}-A)\, e^1 * \cdots * (\mathbf{1}-A)\, e^{r-1})) +$$

$$+ (-1)^{n-r} \bar{h}^{(r)}\, \theta(\partial\sigma \otimes ((\mathbf{1}-A)\, e^1 * \cdots * (\mathbf{1}-A)\, e^{r-1} * e^r))\Big] .$$

Continuiamo ad applicare lo stesso procedimento rispetto ad $e^1, e^2, \cdots, e^{r-1}$ successivamente; ricordando il significato di $\theta$ (vedi la (4.2.3)), la definizione di $h^{(r)}$ (vedi la (4.1.2) e la successiva (iv)), e che $\varphi_{n-r+1}(\sigma) = [\bar{s}^{(r)}(\partial\sigma)]$ (vedi la (3.1.1)), otteniamo che l'isomorfismo (5.1.8) dà

$$(5.2.7) \qquad \nabla^r \omega'_{n-r+1}(\sigma) = (-1)^{\frac{(4n-3r+3)\,r}{2}} \Big[\bar{h}^{(r)}\, \theta(\partial\sigma \otimes (e^r))\Big] =$$

$$= (-1)^{\frac{(4n-3r+3)\,r}{2}} \Big[\bar{h}^{(r)}(\partial\sigma \times (e^r))\Big] = (-1)^{\frac{(4n-3r+3)\,r}{2}} \Big[\bar{s}^{(r)}(\partial\sigma)\Big] =$$

$$= (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}}\, \varphi_{n-r+1}(\sigma)$$

cioè la conclusione.

(5.2.8) OSSERVAZIONE. Si noti che, dal ragionamento sviluppato, risulta di più di quanto espresso dal Teorema (5.2.1). Precisamente si ha che le cocatene $\varphi_{n-r+1}$ ed $\omega'_{n-r+1}$ differiscono, eventualmente, solo per il segno.

5.3. Il Teorema (5.2.1) ci permette ora di ritrovare, in modo geometrico, il risultato seguente (già stabilito da N. Teleman in [5] sulla base della proprietà di unicità delle classi di Stiefel–Whitney):

(5.3.1) TEOREMA. *Se* $\eta = (\mathrm{E}, \pi, \mathrm{B}, \mathbf{R}^n)$ *è un fibrato vettoriale e* $\xi = \mathrm{S}(\eta) = (\mathrm{S}(\mathrm{E}), \pi, \mathrm{B}, \mathrm{S}^{n-1}, \mathrm{A})$ *è il fibrato di sfere associato ad* $\eta$ *con* A *l'involuzione antipodale, risulta*

$$w_i(\eta) = t_i(\xi), \qquad i = 0, 1, \cdots, n. \tag{5.3.2}$$

*Dimostrazione.* Dalla tesi del Teorema (5.2.1) testè dimostrato, passando alle classi di coomologia, indicate con $\tilde{\varphi}_{n-r+1}$, $\tilde{\omega}'_{n-r+1}$ la riduzione modulo 2 delle cocatene $\varphi_{n-r+1}$, $\omega'_{n-r+1}$, si ha:

$$[\tilde{\varphi}_{n-r+1}] = [\tilde{\omega}'_{n-r+1}] \in \mathrm{H}^{n-r+1}(\mathrm{B}^{(n-r+1)}; \mathbf{Z}_2). \tag{5.3.3}$$

Se $\xi^{(n-r+1)}$ è la restrizione allo scheletro $\mathrm{B}^{(n-r+1)}$ del fibrato di sfere $\xi = \mathrm{S}(\eta)$, per definizione (vedi n. 2.2, in particolare (2.2.5) e (2.2.7)) è

$$[\tilde{\omega}'_{n-r+1}] = t_{n-r+1}(\xi^{(n-r+1)}). \tag{5.3.4}$$

Detta $i : \mathrm{B}^{(n-r+1)} \to \mathrm{B}$ l'inclusione, per la funtorialità delle classi $t_i$ (cfr. [5]) riesce

$$t_{n-r+1}(\xi^{(n-r+1)}) = t_{n-r+1}(i^* \xi) = i^* t_{n-r+1}(\xi). \tag{5.3.5}$$

D'altronde la (3.1.3) ci dice che

$$[\tilde{\varphi}_{n-r+1}] = i^* v_{n-r+1}(\eta).$$

L'eguaglianza (5.3.3), tenuto conto della (5.3.5), ci dà allora:

$$i^* v_{n-r+1}(\eta) = i^* t_{n-r+1}(\xi). \tag{5.3.6}$$

Poiché $i^*$ è un monomorfismo (vedi n. 3.1), se ne deduce quindi

$$v_{n-r+1}(\eta) = t_{n-r+1}(\xi). \tag{5.3.7}$$

Tenuto conto della Proposizione (3.1.4) risulta così provato il Teorema (5.3.1).

## BIBLIOGRAFIA

[1] M. J. GREENBERG, *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin Inc., New York 1967.
[2] S. LEFSCHETZ, *Algebraic Topology*, American Mathematical Society, New York 1942.
[3] J. MILNOR, *Lectures on Characteristic Classes*, Princeton Notes (1957).
[4] N. STEENROD, *Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press (1951).
[5] N. TELEMAN, *Characteristic Classes of Fibre Bundles with Involution* (in corso di stampa in « Annali di Matematica pura ed applicata »).
[6] G. W. WHITEHEAD, *Homotopy Theory*, Massachussetts Institute of Technology Press (1966).