Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alvaro Gonzalez Villalobos

Teoremi limiti funzionali per sistemi moltiplicativi. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.5, p. 415–419.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_5_415_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Probabilità. — *Teoremi limiti funzionali per sistemi moltiplicativi.* Nota II di ALVARO GONZÁLEZ VILLALOBOS, presentata [(*)] dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Multiplicative systems are generally defined in a finite interval. Here we give a definition of a uniformly bounded multiplicative system in the real line, and prove results corresponding to those shown in [2] for the interval [0, 1].

I. In questa Nota II si introduce il concetto di sistema moltiplicativo su tutta la retta reale e, facendo seguito alla Nota lincea [2], si provano i relativi teoremi limiti funzionali.

Sia $\{\psi_j(\omega)\}$, $j = 1, 2, \cdots$, $\omega \in \mathbf{R}$, una successione di funzioni reali quasi periodiche uniformemente limitata: $|\psi_j(\omega)| \leq K$. Poniamo

$$M_{j_1,\cdots,j_k}^{\alpha_1,\cdots,\alpha_k} = \lim_{T\to\infty} (2T)^{-1} \int_{-T}^{T} \psi_{j_1}^{\alpha_1}(\omega) \cdots \psi_{j_k}^{\alpha_k}(\omega)\, d\omega ,$$

dove $k = 1, 2, \cdots, j_1 \neq j_2 \neq \cdots \neq j_k$ e ciascuno degli esponenti $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ ha il valore 1 o 2 [(1)]. In tutti i teoremi che seguono si fa l'ipotesi che la successione $\{\psi_j\}$ abbia le seguenti proprietà:

$$(a)\ M_j^2 = 1 ; \qquad (b)\ M_{j_1,j_2}^{2,2} = 1 ; \qquad (c)\ M_{j_1,\cdots,j_k}^{1,\cdots,1} = 0 , \qquad k = 1, 2, \cdots$$

(cfr. [2], formule (1), (2) e (4)).

II. TEOREMA 7. *Sia* $\{b_{m,j}\}$, $m = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots, m$, *una successione di numeri reali e definiamo* $B_m = \left(\sum_{j=1}^{m} b_{m,j}^2\right)^{1/2}$, $\sigma_m(\omega) = \sum_{j=1}^{m} b_{m,j}\,\psi_j(\omega)$. *Se*

$$\text{i)}\ B_m \to \infty ; \qquad \text{ii)}\ B_m^{-1} \max_{1\leq j\leq m} |b_{m,j}| \xrightarrow{m\to\infty} 0 ,$$

allora

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{T\to\infty} (2T)^{-1} |\{\omega \in [-T, T] : B_m^{-1}\sigma_m(\omega) \leq y\}| = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{y} \exp(-t^2/2)\, dt$$

per ogni $y \in \mathbf{R}$ *ad eccezione di un insieme numerabile.*

Dimostrazione. In vista della quasi periodicità di $B_m^{-1}\sigma_m(\omega)$, la dimostrazione del Teor. 1 di [2] si può ripetere nel caso attuale con ovvie modifiche.

(*) Nella seduta del 26 novembre 1973.

(1) I numeri $M_{j_1,\cdots,j_k}^{\alpha_1,\cdots,\alpha_k}$ esistono perché le funzioni ψ_j sono quasi periodiche.

COROLLARIO 7.1. *Sia* $\{a_j\}$, $j = 1, 2, \cdots$, *una successione di numeri reali e poniamo* $A_m = \left(\sum_{j=1}^{m} a_j^2\right)^{1/2}$. *Siano* $\sigma_m(\omega) = \sum_{j=1}^{m} a_j \alpha_{m,j} \psi_j(\omega)$ *le medie Cesàro-*α $(\alpha \geq 0)$ *di* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j \psi_j(\omega)$; $B_m = \left(\sum_{j=1}^{m} a_j^2 \alpha_{m,j}^2\right)^{1/2}$. *Se* $A_m \to \infty$ *e* $A_m^{-1} \max_{1 \leq j \leq m} |a_j| \xrightarrow{m \to \infty} 0$, *allora*

$$\lim_{m \to \infty} \lim_{T \to \infty} (2T)^{-1} |\{\omega \in [-T, T] : B_m^{-1} \sigma_m(\omega) \leq y\}| = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{y} \exp(-t^2/2) \, dt$$

per ogni $y \in \mathbf{R}$ *ad eccezione di un insieme numerabile.*

III. Consideriamo una serie $S(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \psi_j(\omega)$, $a_j \in \mathbf{R}$, dove $\{\psi_j\}$ sia una successione uniformemente limitata di funzioni quasi periodiche godente delle proprietà (a), (b), (c) e (d) $M^{2,1,1}_{j_1,j_2,j_3} \equiv 0$.

Sia $A_m = \left(\sum_{j=1}^{m} a_j^2\right)^{1/2}$ e sia $\{\alpha_{m,j}\}$, $m, j = 0, 1, \cdots$, una successione doppia di numeri reali non negativi tale che $\alpha_{m,j} = 0$ se $j > m$. Supponiamo che $\alpha_{m,j}$ sia decrescente quando j cresce, e che $\alpha_{m,j}$ sia crescente ed abbia limite 1 per $m \to \infty$. Poniamo $A_m^* = \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{m,j}^2 a_j^2\right)^{1/2}$ per $m = 1, 2, \cdots$; $A_0^* = 0$. Le medie lineari della serie $S(\omega)$ saranno scritte $\sigma_m(\omega) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{m,j} a_j \psi_j(\omega)$ per $m = 1, 2, \cdots$; $\sigma_0(\omega) \equiv 0$.

TEOREMA 8. *Sia* $X_T^m(\omega, t) = A_m^{*-1} \sigma_k(\omega)$ *per* $t \in [A_k^{*2} A_m^{*-2}, A_{k+1}^{*2} A_m^{*-2})$ (2), $\omega \in [-T, T]$, $m, T = 1, 2, \cdots$, *e* $k = 0, 1, \cdots, m-1$; $X_T^m(\omega, 1) = A_m^{*-1} \sigma_{m-1}(\omega)$. *Ammettiamo che siano valide le condizioni*:

i) $A_m \to \infty$;

ii) $A_m^{-1} \max_{1 \leq j \leq m} |a_j| \xrightarrow{m \to \infty} 0$;

iii) $\Gamma_m(t_1, t_2) = \lim_{T \to \infty} (2T)^{-1} \int_{-T}^{T} X_T^m(\omega, t_1) X_T^m(\omega, t_2) \, d\omega \xrightarrow{m \to \infty} \Gamma(t_1, t_2) \in \mathbf{R}$

per ogni $t_1, t_2 \in [0, 1]$ *e* $\Gamma(t, t) = t$ *per* $t \in [0, 1]$. *Consideriamo la misura di Lebesgue normalizzata di* $[-T, T]$. *Allora, esiste una famiglia di processi stocastici* $\{Z^m(\cdot, t) : 0 \leq t \leq 1\}$, $m = 1, 2, \cdots$, *tale che* $X_T^m \xRightarrow{T \to \infty} Z^m \xRightarrow{m \to \infty} X$ *in* $(D, \mathfrak{D})$, *dove* $\{X(\cdot, t) : 0 \leq t \leq 1\}$ *è un processo gaussiano.*

Dimostrazione. Per ogni fissato m, sia $\mu^m_{t_1, \cdots, t_k}$ la misura di probabilità associata alla distribuzione k-dimensionale

$$\lim_{T \to \infty} (2T)^{-1} |\{w \in [-T, T] : X_T^m(w, t_i) \leq y_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k\}|,$$

(2) Scriveremo $k = k(m, t)$.

$t_1, \cdots, t_k \in [0, 1], y_1, \cdots, y_k \in \mathbf{R}$ (è noto che questo limite esiste per ogni $y_1, \cdots, y_k \in \mathbf{R}$ ad eccezione di un insieme numerabile).

Proviamo anzitutto che esiste in D un elemento aleatorio Z^m con distribuzioni finito-dimensionali $\mu^m_{t_1, \cdots, t_k}$. Poniamo $E_T(f) = (2T)^{-1} \int_{-T}^{T} f(w)\, dw$.

Sia $t_1 \leq t \leq t_2$, $k_1 = k_1(m, t_1)$, $k = k(m, t)$ e $k_2 = k_2(m, t_2)$. Si ricava dalle diseguaglianze di Chebychev e di Hölder che

$$
\begin{aligned}
(8.1) \qquad & (2T)^{-1} |\{w \in [-T, T] : |X^m_T(w, t) - X^m_T(w, t_1)| \geq \lambda, \\
& |X^m_T(w, t_2) - X^m_T(w, t)| \geq \lambda\}| \leq \\
& \leq \lambda^{-3} A^{*-3}_m E^{3/8}_T(|\sigma_k - \sigma_{k_1}|^4)\, E^{3/8}_T(|\sigma_{k_2} - \sigma_k|^4).
\end{aligned}
$$

Poniamo

$$
(8.2) \qquad E_T(|\sigma_r - \sigma_s|^4) = (2T)^{-1} \int_{-T}^{T} \left(\sum_{j=1}^{s} c_{s,r,j}\, \psi_j(w) \right)^4 dw,
$$

dove $r < s$ e $c_{s,r,j} = a_j(\alpha_{s,j} - \alpha_{r,j})$ per $1 \leq j \leq r$, $c_{s,r,j} = a_j \alpha_{s,j}$ per $r + 1 \leq j \leq s$. Dalle proprietà (*a*) — (*d*) deduciamo che esiste una costante $\hat{K}$, indipendente da r e s, tale che

$$
(8.3) \qquad \lim_{T \to \infty} E_T(|\sigma_r - \sigma_s|^4) \leq \hat{K} \left(\sum_{j=1}^{s} c^2_{s,r,j} \right)^2 \leq \hat{K} (A^{*2}_s - A^{*2}_r)^2.
$$

Da (8.1) e (8.3) concludiamo che esiste una costante Q, indipendente da m, k, k_1 e k_2, tale che

$$
\begin{aligned}
(8.4) \qquad & \mu^m_{t_1, t, t_2} \{(\beta_1, \beta, \beta_2) : |\beta - \beta_1| \geq \lambda, |\beta_2 - \beta| \geq \lambda\} \leq \\
& \leq \lambda^{-3} Q (A^{*-2}_m A^{*2}_k - A^{*-2}_m A^{*2}_{k_1})^{3/4} (A^{*-2}_m A^{*2}_{k_2} - A^{*-2}_m A^{*2}_k)^{3/4}.
\end{aligned}
$$

Inoltre, se $\varepsilon > 0$, $0 \leq t \leq 1$, $h > 0$, $k_1 = k_1(m, t)$ e $k = k(m, t + h)$, allora si ha

$$
\begin{aligned}
(8.5) \qquad & \lim_{T \to \infty} (2T)^{-1} |\{w \in [-T, T] : |X^m_T(w, t + h) - X^m_T(w, t)| \geq \varepsilon\}| \leq \\
& \leq \varepsilon^{-3} \hat{K} (A^{*-2}_m A^{*2}_k - A^{*-2}_m A^{*2}_{k_1})^{3/2}.
\end{aligned}
$$

Pertanto

$$
(8.6) \qquad \lim_{h \downarrow 0} \mu^m_{t, t+h} \{(\beta_1, \beta_2) : |\beta_2 - \beta_1| \geq \varepsilon\} = 0.
$$

Da (8.4) e (8.6) si ricava (cfr. [1], p. 130, Teor. 15.7, e p. 134, formula 15.44) che esiste una famiglia di processi stocastici $\{Z^m(\cdot, t) : 0 \leq t \leq 1\}$ in D tale che

$$
(8.7) \qquad (X^m_T(\cdot, t_1), \cdots, X^m_T(\cdot, t_p)) \xRightarrow{T \to \infty} (Z^m(\cdot, t_1), \cdots, Z^m(\cdot, t_p)).
$$

Proviamo ora che $X_T^m \xRightarrow{T} Z^m$ in $(D, \mathfrak{D})$. Osserviamo che

$$E_T(|\sigma_s - \sigma_r|^4) \leq K^4 s^4 (A_s^{*2} - A_r^{*2})^2 \tag{8.8}$$

per ogni $T, r \leq s$ e, in conseguenza, da (8.1) ricaviamo che

$$\begin{aligned}(2T)^{-1} |\{w \in [-T, T] : |X_T^m(w, t) - X_T^m(w, t_1)| \geq \lambda, \\ |X_T^m(w, t_2) - X_T^m(w, t)| \geq \lambda\}| \leq \\ \leq \lambda^{-3} K^3 m^{3/4} (A_m^{*-2} A_k^{*2} - A_m^{*-2} A_{k_1}^{*2})^{3/4} (A_m^{*-2} A_{k_2}^{*2} - A_m^{*-2} A_{k_1}^{*2})^{3/4}\end{aligned} \tag{8.9}$$

per $t_1 \leq t \leq t_2$, $k_1 = k_1(m, t_1)$, $k = k(m, t)$ e $k_2 = k_2(m, t_2)$.

Inoltre, da (8.7) otteniamo

$$P(Z^m(\cdot, 1) \neq Z^m(\cdot, 1^-)) = 0. \tag{8.10}$$

Combinando le formule (8.7), (8.9) e (8.10) si conclude che

$$X_T^m \xRightarrow{T \to \infty} Z^m \quad \text{in} \quad (D, \mathfrak{D}) \tag{8.11}$$

(cfr. [1], p. 128, Teor. 15.6, e p. 133, formula 15.39). In conseguenza, da (8.3) e dalle disuguaglianze di Chebychev e di Hölder si ricava

$$P(|Z^m(\cdot, t_2) - Z^m(\cdot, t_1)| \geq \lambda) \leq \lambda^{-3} Q' (A_m^{*-2} A_{k_2}^{*2} - A_m^{*-2} A_{k_1}^{*2})^{3/2} \tag{8.12}$$

per ogni $\lambda > 0$, ove $t_1 \leq t_2$ e $k_1 = k_1(m, t_1)$, $k_2 = k_2(m, t_2)$.

Da questa ultima formula, ripetendo l'argomentazione usata per passare dalla formula (3.3) alla (3.7) nella dimostrazione del Teor. 3 di [2], si conclude che (come si dice in inglese)

$$\{Z^m\} \quad \text{è «tight» in} \quad (D, \mathfrak{D}). \tag{8.13}$$

Se si tien conto di (iii), per il teorema di Kolmogorov esiste un processo gaussiano $\{X(\cdot, t) : 0 \leq t \leq 1\}$ tale che $E(X(\cdot, t)) \equiv 0$, $V(X(\cdot, t)) \equiv t$ e $\mathrm{Cov}(X(\cdot, t_1), X(\cdot, t_2)) = \Gamma(t_1, t_2)$. Ripetendo l'argomentazione data nella dimostrazione del Teor. 3 di [2] per passare dalla formula (3.9) alla (3.12), si ottiene

$$(Z^m(\cdot, t_1), \cdots, Z^m(\cdot, t_p)) \xRightarrow{m \to \infty} (X(\cdot, t_1), \cdots, X(\cdot, t_p)). \tag{8.14}$$

Pertanto, se $\mu_{t_1, \ldots, t_p}$ indica la distribuzione di $(X(\cdot, t_1), \cdots, X(\cdot, t_p))$, combinando (8.4) e (iii) si ottiene

$$\begin{aligned}\mu_{t_1, t, t_2}\{(\beta_1, \beta, \beta_2) : |\beta - \beta_1| \geq \lambda, |\beta_2 - \beta| \geq \lambda\} \leq \\ \leq \lambda^{-3} Q (t - t_1)^{3/4} (t_2 - t)^{3/4},\end{aligned} \tag{8.15}$$

dove $t_1 \leq t \leq t_2$ e Q designa una costante assoluta.

Di più, se $h > 0$, combinando (8.12) e (iii) si ottiene

$$\lim_{h\downarrow 0} \mu_{t,t+h}\{(\beta_1, \beta_2) : |\beta_2 - \beta_1| \geq \varepsilon\} \leq \lim_{h\downarrow 0} \varepsilon^{-3} Q' h^{3/2} = 0 . \tag{8.16}$$

Dalle ultime due formule segue che $X \in D$ (cfr. [1], p. 130, Teor. 15.7, e p. 134, formula 15.44). Pertanto da (8.13) e (8.14) si conclude, come volevasi, che

$$Z^m \xRightarrow{m\to\infty} X \qquad \text{in } (D, \mathfrak{D}).$$

I Corollari 3.1, 3.2 e 3.3 rimangono validi per una successione $\{\psi_j\}$ simile a quella che appare nel Teor. 8. Precisamente:

COROLLARIO 8.1. *Se si verificano le condizioni del Teor. 8 e l'ipotesi addizionale* $\Gamma(t_1, t_2) = \min\{t_1, t_2\}$, *allora* $X_T^m \xRightarrow{T\to\infty} Z^m \xRightarrow{m\to\infty} W$ *in* $(D, \mathfrak{D})$.

COROLLARIO 8.2. *Nell'ipotesi del Teor. 8 con esclusione della* (iii), *se le* σ_m *sono le somme parziali di* $\sum_j a_j \psi_j(w)$, *allora* $X_T^m \Rightarrow Z^m \Rightarrow W$ *in* $(D, \mathfrak{D})$.

COROLLARIO 8.3. *Siano* $\sigma_m(w)$ *le medie Cesàro–*1 *di* $\sum_j a_j \psi_j(w)$, *e supponiamo che* $(n+1)^{-1} \sum_{j=1}^{n} j a_j^2 = o(A_n^2)$. *Se sono valide le condizioni del Teor. 8, con esclusione dell'ipotesi* (iii), *allora* $X_T^m \Rightarrow Z^m \Rightarrow W$ *in* $(D, \mathfrak{D})$.

Osserviamo da ultimo che la formula esplicita data dal Teor. 4 di [2] sussiste ancora nel caso attuale.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. BILLINGSLEY, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley, New York 1968.
[2] A. GONZÁLEZ VILLALOBOS, *Teoremi limiti funzionali per sistemi moltiplicativi*, I, «Rend. Accad. Naz. Lincei», 55 (3–4), 228–235 (1973).