Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Tommaso Ruggeri

Su una naturale estensione a tre variabili dell'equazione di Monge-Ampère

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.5, p. 445–449.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_5_445_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Fisica matematica. — *Su una naturale estensione a tre variabili dell'equazione di Monge-Ampère.* Nota di TOMMASO RUGGERI [*], presentata [**] dal Socio C. CATTANEO.

SUMMARY. — It will be shown that the condition of exceptionality for all the discontinuity-waves of the equation $u_{00} + f(x_i, t, u, u_i, u_{0i}, u_{jk}) = 0$ $(i = 1, 2; j \leq k)$ reduces this to a straightforward generalization of the Monge-Ampère equation in three variables.

1. INTRODUZIONE

Si consideri un'equazione differenziale a derivate parziali del secondo ordine non lineare del tipo:

$$u_{00} + f(x, t, u_x, u_0, u_{xx}, u_{0x}) = 0 \qquad \left(u_x = \frac{\partial u}{\partial x}\ ;\ u_0 = \frac{\partial u}{\partial t}\right) \tag{1}$$

con u funzione scalare delle due variabili indipendenti x e t.

Per studiare la propagazione delle onde di discontinuità deriviamo la (1) rispetto a t ottenendo così un'equazione del terzo ordine quasi lineare. Si supponga ora che la u sia ovunque continua insieme alle sue derivate prime e seconde mentre le derivate terze siano discontinue attraverso una generica superficie d'onda Σ di equazione cartesiana $\varphi(x^\alpha) = 0$.

Le onde che si vengono così a caratterizzare essendo associate ad un'equazione quasi lineare in generale evolvono in onde d'urto a meno che non si imponga che siano tutte eccezionali [1], [2].

G. Boillat [3] imponendo la condizione di completa eccezionalità ha ottenuto un sistema di due equazioni differenziali a derivate parziali non lineari per la f la cui integrazione mostra che la (1) è, in tale condizione, necessariamente l'equazione di Monge-Ampère:

$$\mathrm{H}u_{00} + 2\,\mathrm{K}u_{0x} + \mathrm{L}u_{xx} + \mathrm{M} + \mathrm{N}(u_{00}\,u_{xx} - u_{0x}^2) = 0 \tag{2}$$

(i coefficienti sono funzioni di x, t, u, u_x, u_0).

Recentemente A. V. Pogorelov [4] ha utilizzato una generalizzazione della (2) ad n dimensioni, assumendo come parte non lineare nelle derivate seconde $u_{\alpha\beta}$ della funzione u il determinante della matrice $\| u_{\alpha\beta} \|$ $(\alpha, \beta = 0, 1, \cdots, n)$.

In questo lavoro si cerca di generalizzare l'equazione di Monge-Ampère usando il criterio della completa eccezionalità, dato che per quanto detto prima esso risulta caratteristico nel caso unidimensionale.

(*) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica. Istituto Matematico - Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 26 novembre 1973.

Ci limiteremo al caso in cui u sia funzione di tre variabili x_1, x_2 e t in quanto, come si vedrà, già in queste condizioni il problema analitico si presenta piuttosto complesso. Ci si imbatte in un sistema di 9 equazioni differenziali alle derivate parziali non lineare (sovrabbondante) in 5 variabili effettive.

Il risultato a cui si perviene è il seguente:

L'equazione generalizzata di Monge-Ampère (nel senso sopradetto) si ottiene eguagliando a zero una combinazione lineare di tutti i possibili minori estratti della matrice $\| u_{\alpha\beta} \|$ *(con coefficienti funzioni arbitrarie delle coordinate, del campo* u *e delle sue derivate prime).*

Questo risultato è in accordo con una congettura di Boillat [5] e completa la generalizzazione proposta da Pogorelov.

2. Si consideri l'equazione:

$$u_{00} + f(x_i, t, u, u_i, u_{0i}, u_{jk}) = 0 \qquad (i = 1, 2; j \leq k). \tag{3}$$

Si derivi rispetto al tempo la (3) e si scriva l'equazione per le discontinuità attraverso la superficie d'onda Σ operando mediante la classica sostituzione:

$$\partial_0 \to -\lambda\delta \quad ; \quad \partial_i \to n_i \delta$$

dove $-\lambda = \varphi_0/|\nabla\varphi|$, $n_i = \varphi_i/|\nabla\varphi|$ e $\delta = \left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]$ (λ, velocità normale di avanzamento; $\vec{n}$, versore della normale a Σ; [ ] discontinuità attraverso Σ). Si ottiene così:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda f_{u_{0i}} n_i + f_{u_{jk}} n_j n_k = 0 \qquad (\text{su } \Sigma). \tag{4}$$

Da questa equazione λ risulta determinata in funzione di $\vec{n}$ e degli argomenti di f.

Come è noto un'onda è eccezionale [1] se $\delta\lambda = 0$; tale condizione si esprime:

$$-\lambda\lambda_{u_{0i}} n_i + \lambda_{u_{jk}} n_j n_k = 0 \qquad (\text{su } \Sigma). \tag{5}$$

L'esistenza di onde totalmente eccezionali, richiede che siano simultaneamente soddisfatte (4) e (5) quale che sia Σ e quale che sia u con le sue derivate prime e seconde. Pertanto se si deriva la (4) una volta rispetto a u_{op} ed una volta rispetto a u_{mr}, si ottiene:

$$P'\lambda_{u_{0p}} - \lambda f_{u_{0i} u_{op}} n_i + f_{u_{jk} u_{0p}} n_j n_k = 0 \tag{6}$$

$$P'\lambda_{u_{mr}} - f_{u_{0i} u_{mr}} n_i + f_{u_{jk} u_{mr}} n_j n_k = 0 \qquad \left(P' = \frac{\partial P}{\partial \lambda}\right). \tag{7}$$

Se si contrae la (6) con n_p e la (7) con $n_m n_r$ e si sottrae si ottiene, tenuto conto della (5):

$$\lambda^2 f_{u_{0i} u_{0p}} n_i n_p - 2\lambda f_{u_{0i} u_{jk}} n_i n_j n_k + f_{u_{jk} u_{pq}} n_j n_k n_p n_q = 0. \tag{8}$$

Si sostituisca nella (8) λ^2 ricavata dalla (4) e quindi si richieda che l'eguaglianza valga quale che siano le radici λ di P (λ):

$$(f_{u_{0i}} f_{u_{0l} u_{0j}} - 2 f_{u_{0i} u_{lj}}) n_i n_l n_j = 0 \tag{9}$$

$$(f_{u_{ij} u_{lk}} - f_{u_{ij}} f_{0l\, u_{0k}}) n_i n_l n_j n_k = 0 \tag{10}$$

Posto per comodità:

$$u_{0i} = s_i \quad ; \quad u_{ii} = r_i \quad ; \quad u_{12} = z \,, \tag{11}$$

come conseguenza di (9) e (10), in virtù del fatto che esse devono essere verificate quale che sia $\vec{n}$, si ottiene il seguente sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali:

$$f_{s_1} f_{s_1 s_1} - 2 f_{s_1 r_1} = 0 \tag{12}$$

$$f_{r_1 r_1} - f_{r_1} f_{s_1 s_1} = 0 \tag{13}$$

$$f_{s_2} f_{s_2 s_2} - 2 f_{s_2 r_2} = 0 \tag{14}$$

$$f_{r_2 r_2} - f_{r_2} f_{s_2 s_2} = 0 \tag{15}$$

$$f_{s_1} f_{s_2 s_2} + 2 (f_{s_2} f_{s_1 s_2} - f_{s_1 r_2} - f_{s_2 z}) = 0 \tag{16}$$

$$f_{s_2} f_{s_1 s_1} + 2 (f_{s_1} f_{s_1 s_2} - f_{s_2 r_1} - f_{s_1 z}) = 0 \tag{17}$$

$$2 (f_{z r_1} - f_{r_1} f_{s_1 s_2}) - f_z f_{s_1 s_1} = 0 \tag{18}$$

$$2 (f_{z r_2} - f_{r_2} f_{s_1 s_2}) - f_z f_{s_2 s_2} = 0 \tag{19}$$

$$f_{zz} + 2 (f_{r_1 r_2} - f_z f_{s_1 s_2}) - f_{r_1} f_{s_2 s_2} - f_{r_2} f_{s_1 s_1} = 0 \,. \tag{20}$$

Trattasi di 9 equazioni differenziali nella funzione incognita f delle 5 variabili effettive: s_i, r_i e z (nel seguito per brevità di scrittura, nelle varie dipendenze funzionali si ometteranno le variabili inessenziali: x_i, t, u, u_i).

3. Nel caso di due sole variabili il sistema sopra scritto si riduce alle sole equazioni (12) e (13) la cui soluzione è [3]:

$$f = \frac{-a s_1^2 + b s_1 + c r_1 + d}{a r_1 + g} \tag{21}$$

con a, b, c, d e g funzioni delle variabili inessenziali.

Per integrare il sistema (12)...(20), si cominci con l'osservare che la soluzione trovata nel caso unidimensionale (21) è ancora utilizzabile con la differenza che adesso i coefficienti sono funzioni anche di s_2, r_2 e z.

Per comodità si scriva la (21) nella forma:

$$f = \mathrm{A}(s_2, r_1, r_2, z)\, s_1^2 + \mathrm{B}(s_2, r_1, r_2, z)\, s_1 + \mathrm{C}(s_2, r_1, r_2, z) \,. \tag{22}$$

Osservando che le (14) e (15) differiscono dalle (12) e (13) solo per lo scambio degli indici 1 e 2, ci si convince che i coefficienti A, B e C sono necessariamente dei polinomi di secondo grado in s_2 e quindi:

$$f = \alpha s_1^2 s_2^2 + h s_1 s_2^2 + k s_1^2 s_2 + m s_2^2 + n s_1^2 + p s_1 s_2 + q s_2 + v s_1 + w \tag{23}$$

dove i nuovi coefficienti sono funzioni di r_1, r_2 e z.

Se si sostituisce la (23) dapprima in (12) e poi in (14) si ottiene come è facile verificare:

$$\alpha = h = k = 0,$$

$$n = -\frac{1}{r_1 + \psi(r_2, z)} \quad ; \quad p = -n\sigma(r_2, z) \quad ; \quad v = -n\chi(r_2, z) \tag{24}$$

$$m = -\frac{1}{r_2 + \gamma(r_1, z)} \quad ; \quad p = -m\beta(r_1, z) \quad ; \quad q = -m\rho(r_1, z)\,. \tag{25}$$

Dal confronto delle (24,2) e (25,2) segue:

$$\beta = \mathrm{H}(z)\gamma + \mathrm{R}(z) \quad ; \quad \sigma = \mathrm{H}(z)\psi + \mathrm{T}(z)$$

$$\gamma = \frac{\mathrm{J}(z) - \mathrm{R}(z) r_1}{\mathrm{H}(z) r_1 - \mathrm{T}(z)} \quad ; \quad \psi = \frac{\mathrm{J}(z) - \mathrm{T}(z) r_2}{\mathrm{H}(z) r_2 - \mathrm{R}(z)}\,.$$

Posto $\mathrm{Q}(z) = \mathrm{HJ} - \mathrm{RT}$, si ha ora per la f la seguente espressione:

$$f = \frac{(\mathrm{R} - \mathrm{H}r_2) s_1^2 + (\mathrm{T} - \mathrm{H}r_1) s_2^2 + \mathrm{Q} s_1 s_2 + (\mathrm{H}r_2 - \mathrm{R})\chi s_1 + (\mathrm{H}r_1 - \mathrm{T})\rho s_2 + w}{\mathrm{H}r_1 r_2 - \mathrm{R}r_1 - \mathrm{T}r_2 + \mathrm{J}} \tag{26}$$

dove $\chi \equiv \chi(r_2, z)$; $\rho \equiv \rho(r_1, z)$ e $w \equiv w(r_1, r_2, z)$ mentre tutti gli altri coefficienti sono funzioni della sola z.

Per la determinazione di χ, ρ e w basta sostituire la (26) in (13) e (15) e si trova:

$$\chi = \frac{\mathrm{D}(z) r_2 + \mathrm{V}(z)}{\mathrm{H}r_2 - \mathrm{R}} \quad , \quad \rho = \frac{\mathrm{G}(z) r_1 + \mathrm{W}(z)}{\mathrm{H}r_1 - \mathrm{T}}\,,$$

$$w = \mathrm{M}(z) r_1 r_2 + \mathrm{N}(z) r_1 + \mathrm{S}(z) r_2 + \mathrm{P}(z)\,.$$

Sostituendo invece in (16) e in (17) si ha:

$$\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{Q}' - 2\mathrm{H}}{\mathrm{Q}} = \frac{\mathrm{Q} + \mathrm{J}'}{\mathrm{J}} = \frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{V}' + \mathrm{G}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{W}' + \mathrm{D}}{\mathrm{W}} = \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}} \qquad \left({}' = \frac{d}{dz}\right)$$

e quindi: $\mathrm{H} = a\mathrm{G}$, $\mathrm{T} = b\mathrm{G}$, $\mathrm{R} = c\mathrm{G}$, $\mathrm{D} = d\mathrm{G}$, $\mathrm{V} = (-z + \nu)\mathrm{G}$, $\mathrm{W} = (-dz + g)\mathrm{G}$, $\mathrm{Q} = (2az + q)\mathrm{G}$ e $\mathrm{J} = -(az^2 + qz + p)\mathrm{G}$ essendo a, b, c, d, ν, p, g e q funzioni arbitrarie delle variabili inessenziali.

Da (18) e (19) si ottiene invece: $\mathrm{M} = m\mathrm{G}$, $\mathrm{N} = n\mathrm{G}$, $\mathrm{S} = v\mathrm{G}$, mentre da (20) si ha infine: $\mathrm{P} = (-mz^2 + hz + k)\mathrm{G}$ (tutte le lettere minuscole rappresentano ormai delle funzioni arbitrarie delle variabili inessenziali).

Ne segue che l'espressione che compete alla f quale soluzione del sistema differenziale (12)...(20) è la seguente:

$$\begin{aligned} f = {} & [(c - ar_2) s_1^2 + (b - ar_1) s_2^2 + (2az + q) s_1 s_2 + (dr_2 - z + \nu) s_1 + \\ & + (r_1 - dz + g) s_2 + mr_1 r_2 + nr_1 + vr_2 - mz^2 + hz + k]/ \\ & /[ar_1 r_2 - cr_1 - br_2 - (az^2 - qz - p)]\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Pertanto, sostituendo la (27) nella (3), si ottiene l'equazione:

$$(28) \quad \begin{aligned} & Hu_{00} + Ku_{01} + Mu_{02} + Nu_{11} + Pu_{22} + Gu_{12} + L(u_{00}u_{11} - u_{01}^2) + \\ & + R(u_{00}u_{22} - u_{02}^2) + A(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) + B(u_{00}u_{12} - u_{01}u_{02}) + \\ & + C(u_{01}u_{22} - u_{12}u_{02}) + D(u_{02}u_{11} - u_{12}u_{01}) + \\ & + E[u_{00}(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) - u_{01}^2u_{22} - u_{02}^2u_{11} + 2u_{01}u_{02}u_{12}] + F = 0 . \end{aligned}$$

L'equazione (28) può dunque interpretarsi come una generalizzazione dell'equazione di Monge–Ampère a tre variabili e come si è detto nella introduzione, essa si ottiene annullando una combinazione lineare di tutti i minori estratti dalla matrice formata con le derivate seconde di u (con coefficienti funzioni arbitrarie di x_i, t, u, u_i).

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BOILLAT, *La propagation des ondes*, Paris, Gauthier–Villars (1965).

[2] P. D. LAX, *Contributions to the theory of partial differential equations*. Princeton University Press (1954).

[3] G. BOILLAT, *Le champ scalaire de Monge–Ampère*, « Det. Kgl. Norske Vid. Selsk Forh. », *Bd. 41* (1968).

[4] A. V. POGORELOV, *Dirichlet problem for multidimensional analogue of Monge–Ampère equation*, « Dokl. Akad. Nauk., SSSR », *201* 790 (1971).

[5] G. BOILLAT, *Ondes incomplètes*, « C. R. Acad. Sc. Paris », *270* A, 217 (1970).