Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Antonio Grioli

Sulla derivata trasversa di Cattaneo e la derivata lagrangiana spaziale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.5, p. 450–455.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_5_450_0>

Fisica matematica. — *Sulla derivata trasversa di Cattaneo e la derivata lagrangiana spaziale* (*). Nota di ANTONIO GRIOLI, presentata (**) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — Cattaneo's relative formulation of relativistic mechanics is based on the covariant transverse derivative of an arbitrary totally spatial tensor field. On the other hand, Bressan bases relativistic elasticity, possibly with couple stresses, on the Lagrangian spatial derivative of an arbitrary double tensor. I give a chronotopic expression of the spatial projection of the Lagrangian derivative in the case that the reference configuration coincides with the one of the body on a locally time-orthogonal space-time section in $\mathcal{E}$. By the chronotopic expression above, I determine the relation between the two derivatives and prove the coincidence of the nine significative components. Furthermore I give a short proof of a fundamental theorem of Cattaneo on the transverse derivative.

1. In [1] Cattaneo basa la formulazione relativa delle leggi della meccanica relativistica, tra l'altro, sulla derivata covariante trasversa di un arbitrario campo tensoriale totalmente spaziale, costruita mediante proiezioni formali dei simboli di Christoffel (sulla piattaforma spaziale).

D'altra parte A. Bressan basa la elasticità relativistica eventualmente con coppie di contatto, sulla derivata lagrangiana spaziale di un arbitrario doppio tensore, introdotta in [3]. In generale tale derivata ha indici sia spaziali che cronotopici.

Nella presente Nota dapprima dò un'espressione puramente cronotopica della proiezione spaziale della derivata lagrangiana quando la configurazione di riferimento coincide con quella assunta dal corpo nel passaggio attraverso una sezione localmente tempo-ortogonale nel punto evento considerato.

Sfruttando poi l'espressione cronotopica di cui sopra calcolo la relazione esistente tra le due derivate e mostro la coincidenza delle nove componenti significative. Servendomi degli algoritmi introdotti dò una breve dimostrazione di un teorema fondamentale di Cattaneo sulla derivata trasversa.

2. PRELIMINARI CINEMATICI

Sia C un corpo continuo animato da un moto sufficientemente regolare, che assumo come fluido di riferimento nello spazio-tempo S_4, pensato come una varietà Riemanniana due volte differenziabile.

Sia $\mathcal{S}^*$ un processo fisicamente possibile e in corrispondenza $g_{\rho\sigma}$ il tensore metrico e w_c^* il tubo di universo di C. Il carattere di ammissibilità del

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca del C.N.R. per la fisica matematica.

(**) Nella seduta del 26 novembre 1973.

sistema di coordinate si traduce nelle disuguaglianze [1]:

$$g_{00} < 0 \qquad g_{rs}\, dx^r\, dx^s > 0 . \tag{1}$$

Sia S_3^* l'intersezione di w_c^* con una ipersuperficie di S_4 del genere spazio; pongo su di essa:

$$y^L = \delta^L_\rho\, x^\rho \qquad \overset{*}{a}_{LM} = \overset{\perp}{g}_{LM} \qquad (\text{su } S_3^*) \tag{2}$$

dove $\overset{\perp}{g}_{\rho\sigma}$ è il proiettore spaziale definito da:

$$\overset{\perp}{g}_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma} + u_\rho\, u_\sigma , \tag{3}$$

S_3^* con la metrica:

$$ds^{*2} = a^*_{LM}\, dy^L\, dy^M \tag{4}$$

è una varietà Riemanniana con segnatura $+++$ e costituisce l'analogo relativistico della configurazione di riferimento.

Le coordinate y^L su S_3^* prendono il nome di coordinate materiali e assieme ai loro incrementi dy^L individuano i punti e gli elementi lineari materiali.

Si consideri ora un moto arbitrario M di C e siano:

$$x^\rho = x^\rho(t\,, y^1\,, y^2\,, y^3) \tag{5}$$

le sue equazioni, con t parametro temporale crescente verso il futuro.

Le (5) sono determinate a meno dell'arbitraria sostituzione:

$$t = t(\bar{t}\,, y^1, y^2, y^3) \qquad \text{con} \quad \frac{\partial t}{\partial \bar{t}} > 0 . \tag{6}$$

Sia:

$$T^{\alpha_1\cdots A_1\cdots}_{\beta_1\cdots B_1\cdots} = T^{\cdots}_{\cdots}(x\,, t\,, y) \tag{7}$$

un doppio tensore associato ai punti x^ρ di S_4 e y^L di S_3^*, eventualmente dipendente anche dal parametro t. Ricordo che, riferendosi alla rappresentazione (5) di M, si definisce come derivata lagrangiana spaziale di $T^{\alpha_1\cdots A_1\cdots}_{\beta_1\cdots B_1\cdots}$ nel punto evento $\mathcal{E}$, la sua derivata totale, ove per t si operi una sostituzione:

$$t = t(\tilde{t}, y^1, y^2, y^3) \tag{8}$$

con $\tilde{t}$ tempo-ortogonale in $\mathcal{E}$, cioè il tensore:

$$T^{\alpha_1\cdots A_1\cdots}_{\beta_1\cdots B_1\cdots|L} = [T^{\cdots}_{\cdots}(x\,, t\,, y)_{t=t(\tilde{t}\,,y)}]_{;L} \,. \tag{9}$$

Si vede che il secondo membro di (9) risulta indipendente dalla particolare trasformazione (8) usata. La condizione di tempo-ortogonalità in $\mathcal{E}$ si traduce nella relazione:

$$u^{+}_{L} = u_\rho\, x^\rho_{\ L} = 0 \qquad \text{in} \quad \mathcal{E} . \tag{10}$$

Di $T^{\alpha_1\cdots A_1\cdots}_{\beta_1\cdots B_1\cdots|L}$ Bressan ha calcolato varie espressioni.

(1) In tutta la presente Nota si intende che gli indici greci varino da 0 a 3, mentre quelli latini da 1 a 3.

In questa Nota mi servirò della:

$$\mathrm{T}^{\alpha_1\cdots A_1\cdots}_{\beta_1\cdots B_1\cdots|L} = \mathrm{T}^{\cdots}_{\cdots/\rho}\,\alpha^\rho{}_L + \mathrm{T}^{\cdots}_{\cdots/L} + \frac{\partial \mathrm{T}^{\cdots}_{\cdots}}{\partial t}\,\frac{Dt}{Ds}\,u^+_L \tag{11}$$

dove $\alpha^\rho{}_L$ è il primo gradiente spaziale di posizione dato da:

$$\alpha^\rho{}_L = \overset{\perp}{g}{}^\rho_\sigma\, x^\sigma_L = x^\rho{}_L + u^\rho\, u^+_L\,, \tag{12}$$

e dove il parametro temporale è qualunque, cioè il secondo membro di (12) può venire calcolato a partire da una qualunque rappresentazione (5) di M.

Per la derivata lagrangiana così definita valgono le seguenti proprietà:

$$g_{\rho\sigma|L} = g_\rho{}^\sigma{}_{|L} = g^{\rho\sigma}{}_{|L} = a^*{}_{AB|L} = a^*{}_A{}^B{}_{|L} = a^{*AB}{}_{|L} = 0\,, \tag{13}$$

così che « $|L$ » commuta con le operazioni di innalzamento ed abbassamento di indici tensoriali.

3. Espressione di $T_{\rho|M}\,\alpha^\rho{}_L$ con T_ρ spaziale e una opportuna scelta della configurazione di riferimento

Fissato il punto evento $\mathcal{E}$, mi pongo in un riferimento $(\bar{x})$ ivi localmente pseudoeuclideo; considero la ipersuperficie Γ per $\mathcal{E}$, tempo–ortogonale in $\mathcal{E}$. Sia:

$$\bar{x}^0 = f(\bar{x}^r) \tag{14}$$

la sua equazione in $(\bar{x})$.

In $(\bar{x})$ valgono le relazioni locali in $\mathcal{E}$:

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \delta'_{\alpha\beta} \qquad u^\rho = \delta^\rho_0 \qquad u_\rho = -\,\delta_{\rho 0} \qquad (\delta'_{00} = -\,1\,,\ \delta'_{r\rho} = \delta_{r\rho})\,. \tag{15}$$

Considerata la trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} \bar{x}^r = x'^r \\ \bar{x}^0 = x'^0 + f(x'^r) \end{cases} \qquad \begin{cases} x'^r = \bar{x}^r \\ x'^0 = \bar{x}^0 - f(\bar{x}^r) \end{cases} \tag{16}$$

è facile provare che relazioni analoghe alle (15) valgono anche nel nuovo riferimento (x') così ottenuto (2). Si ha dunque in (x'):

$$g_{\alpha\beta} = \delta'_{\alpha\beta} \qquad u^\rho = \delta^\rho_0 \qquad u_\rho = -\,\delta_{\rho 0}\,. \tag{17}$$

Identifico la configurazione S_3^* di riferimento con quella assunta dal corpo nel processo attuale nell'attraversamento della superficie Γ e scelgo t in modo che sia costante su S_3^*. Allora osservando che in (x') l'equazione di Γ è:

$$x'^0 = 0\,, \tag{18}$$

si ha:

$$x'^\rho{}_{LM} = 0\,, \tag{19}$$

oltre alla:

$$u^+_L = 0 \quad \text{in } \mathcal{E}\,. \tag{20}$$

(2) Vedi [2].

Considero il prodotto interno del tensore spaziale T_ρ per $\alpha^\rho_{L|M}$:

$$T_\rho\, \alpha^\rho_{L|M} = T_\rho\, \alpha^\rho_{LM}\,, \tag{21}$$

dove α^ρ_{LM} è il gradiente spaziale secondo della posizione che, come è noto, è definito mediante la:

$$\alpha^\rho_{LM} = \overset{\perp}{g}{}^\rho_\sigma\, \alpha^\sigma_{L|M}\,. \tag{22}$$

Per α^ρ_{LM} vale la seguente espressione generale (3):

$$\alpha^\rho_{LM} = \overset{\perp}{g}{}^\rho_\sigma \left[x^\sigma_{LM} + \frac{Dx^\sigma_L}{Ds}\, \overset{+}{u}_M + u^\sigma_{/M}\, \overset{+}{u}_L + A^\sigma\, \overset{+}{u}_L\, \overset{+}{u}_M \right]. \tag{23}$$

Tenuto conto di (19) e (20), la (23) porge:

$$\alpha^\rho_{LM} = 0 \qquad \text{in} \quad \mathcal{E}. \tag{24}$$

Da (21) e (24) segue allora in $\mathcal{E}$:

$$T_\rho\, \alpha^\rho_{L|M} = 0\,. \tag{25}$$

Si ha in definitiva:

$$T_{\rho|M}\, \alpha^\rho_L = (T_\rho\, \alpha^\rho_L)_{|M} = T^*_{L|M} \qquad \text{con} \quad T^*_L = T_\rho\, \alpha^\rho_L\,. \tag{26}$$

La (26) è una relazione tensoriale e dunque vale in $\mathcal{E}$ in qualunque sistema di coordinate e indipendentemente dalla scelta del parametro temporale. La quantità tra parentesi al secondo membro di (26) è un tensore di S^*_3 e dunque la sua derivata ivi indicata si costruisce con i simboli di Christoffel di S^*_3 (vedi (11)); così anche $T_{\rho|M}\,\alpha^\rho_L$ può essere espresso mediante i coefficienti della metrica di S^*_3 e si ha, tenuto conto della tempo–ortogonalità di Γ in $\mathcal{E}$:

$$T_{\rho|M}\, \alpha^\rho_L = \frac{\partial T^*_L}{\partial y^M} - \left\{ {A \atop L\ M} \right\}^{\perp} T^*_A \tag{27}$$

ove con $\left\{ {A \atop L\ M} \right\}^{\perp}$ si sono indicati i simboli di Christoffel di S^*_3 costruiti con i proiettori spaziali $\overset{\perp}{g}_{AB}$.

4. RELAZIONE TRA LA DERIVATA TRAVERSA DI CATTANEO E QUELLA LAGRANGIANA SPAZIALE DI BRESSAN

Si consideri ancora la ipersuperficie Γ tempo–ortogonale in $\mathcal{E}$, ossia ivi ortogonale a u^ρ. Si fissi inoltre un sistema qualunque (x) di coordinate solidali e si ponga:

$$y^L = \delta^L_r\, x^r \qquad \text{su} \quad S^*_3\,. \tag{28}$$

(3) Vedi ad esempio [2] (68).

Si fissi inoltre il parametro temporale t in modo che sia costante su S_3^*. Allora [4]:

$$u^{+}_{L} = u_{\rho}\, x^{\rho}_{L} = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{E}\,, \tag{29}$$

$$\overset{\perp}{g}_{0\sigma} = 0 \qquad x^{r}_{L} = \delta^{r}_{L} \qquad \text{su} \quad \Gamma \qquad u^{\rho} = \frac{\delta^{\rho}_{0}}{\sqrt{-g_{00}}}\,. \tag{30}$$

Ricordo che la derivata trasversa di Cattaneo di un vettore spaziale T_ρ è definita mediante la:

$$\tilde{\nabla}^{*}_{\sigma} T_{\rho} = \tilde{\partial} T_{\rho} - \widetilde{\left\{ {\tau \atop \sigma\ \rho} \right\}}^{*} T_{\tau} \tag{31}$$

ove $\tilde{\partial}_\sigma$ è l'operatore:

$$\tilde{\partial}_{\sigma} = \partial_{\sigma} + u_{\sigma}\, u^{0}\, \partial_{0} \tag{32}$$

e le quantità $\widetilde{\left\{ {\tau \atop \sigma\ \rho} \right\}}^{*}$ sono le proiezioni formali dei simboli di Christoffel di S_4 date da:

$$\widetilde{\left\{ {\tau \atop \sigma\ \rho} \right\}}^{*} = \overset{\perp}{g}{}^{\tau\omega}\, \widetilde{[\sigma\rho\,,\,\omega]}^{*} \tag{33}$$

$$\widetilde{[\sigma\rho\,,\,\omega]}^{*} = \frac{1}{2}\left(\tilde{\partial}_{\sigma}\overset{\perp}{g}_{\rho\omega} + \tilde{\partial}_{\rho}\overset{\perp}{g}_{\sigma\omega} - \tilde{\partial}_{\omega}\overset{\perp}{g}_{\sigma\rho}\right). \tag{33'}$$

Da (31), tenuto conto di (29), (33) e della spazialità di $T_\rho (T_0 = 0)$, segue:

$$\tilde{\nabla}^{*}_{\sigma} T_{\rho}\, x^{\rho}_{L}\, x^{\sigma}_{M} = \left[\frac{\partial T_{\rho}}{\partial x^{\sigma}} + u_{\sigma}\, u^{0} \frac{\partial T_{\rho}}{\partial x^{0}} - \widetilde{\left\{ {\tau \atop \sigma\ \rho} \right\}}^{*} T_{\tau}\right] x^{\rho}_{L}\, x^{\sigma}_{M} = \tag{34}$$

$$= \left(\frac{\partial T_{\rho}}{\partial x^{\sigma}} - \overset{\perp}{g}{}^{r\omega}\, \widetilde{[\sigma\rho\,,\,\omega]}^{*}\, T_{r}\right) x^{\rho}_{L}\, x^{\sigma}_{M}\,.$$

Si osservi che per $(30)_3$ e (32) si ha:

$$\tilde{\partial}_{0} = \partial_{0} + u_{0}\, u^{0}\, \partial_{0} = \partial_{0} + u_{\rho}\, u^{\rho}\, \partial_{0} = \partial_{0} - \partial_{0} = 0\,. \tag{35}$$

Inoltre per $(30)_1$ è:

$$\partial_{\sigma}\overset{\perp}{g}_{\rho 0} = 0\,. \tag{36}$$

Allora (33)′ implica:

$$\widetilde{[0\rho\,,\,\omega]}^{*} = \widetilde{[\sigma\rho\,,\,0]}^{*} = 0\,. \tag{37}$$

Detto $R(x)$ un qualsiasi scalare o tensore dipendente dalle coordinate x si ha per (32):

$$\tilde{\partial}_{s} R = \partial_{s} R + u_{s}\, u^{0}\, \partial_{0} R\,. \tag{38}$$

Da (29) $(30)_2$ segue:

$$u_{L} = - u_{0}\, x^{0}_{L}\,. \tag{39}$$

(4) Vedi [3, n. 11] e [5].

Allora (38) diviene, tenuto conto della dipendenza di R dalle y tramite le (5), e di (28) e (39):

$$\tilde{\partial}_s \mathrm{R} = \partial_r \mathrm{R} x^r_s + \partial_0 \mathrm{R} x^0_s = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y^s}\,. \tag{40}$$

Per $(30)_2$, (37) e (40), la (34) diviene allora:

$$\tilde{\nabla}^*_\sigma \mathrm{T}_\rho x^\rho_{\mathrm{L}} x^\sigma_{\mathrm{M}} = \frac{\partial \mathrm{T}_\rho}{\partial x^\sigma} x^\rho_{\mathrm{L}} x^\sigma_{\mathrm{M}} - \frac{1}{2} \mathrm{T}_r \overset{\perp}{g}{}^{rs} \left(\frac{\partial \overset{\perp}{g}_{\mathrm{L}s}}{\partial y^{\mathrm{M}}} + \frac{\partial \overset{\perp}{g}_{\mathrm{M}s}}{\partial y^{\mathrm{L}}} - \frac{\partial \overset{\perp}{g}_{\mathrm{LM}}}{\partial y^s} \right). \tag{41}$$

D'altra parte per (11), (12) e (26) si ha:

$$\mathrm{T}^*_{\mathrm{L|M}} = \mathrm{T}_{\rho|\mathrm{M}} \alpha^\rho_{\mathrm{L}} = \mathrm{T}_{\rho/\tau} \alpha^\rho_{\mathrm{L}} \alpha^\tau_{\mathrm{M}} = (\mathrm{T}_{\tau/\mu} \overset{\perp}{g}{}^\tau_\rho \overset{\perp}{g}{}^\mu_\sigma) x^\rho_{\mathrm{L}} x^\sigma_{\mathrm{M}}\,. \tag{42}$$

Essendo $\mathrm{T}^*_{\mathrm{L|M}}$ dato, per (26), (27), (29), (30) e per la spazialità di T_ρ, si ha:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}^*_{\mathrm{L|M}} &= \frac{\partial \mathrm{T}_\rho}{\partial x^\sigma} x^\rho_{\mathrm{L}} x^\sigma_{\mathrm{M}} + \mathrm{T}_r \frac{\partial}{\partial y^{\mathrm{M}}} (x^r_{\mathrm{L}} + u^r u^+_{\mathrm{L}}) - \left\{ {\mathrm{A} \atop \mathrm{LM}} \right\}^\perp \mathrm{T}_{\mathrm{A}} = \\ &= \frac{\partial \mathrm{T}_\rho}{\partial x^\sigma} x^\rho_{\mathrm{L}} x^\sigma_{\mathrm{M}} - \frac{1}{2} \overset{\perp}{g}{}^{\mathrm{AB}} \left[\frac{\partial \overset{\perp}{g}_{\mathrm{LB}}}{\partial y^{\mathrm{M}}} + \frac{\partial \overset{\perp}{g}_{\mathrm{MB}}}{\partial y^{\mathrm{L}}} - \frac{\partial \overset{\perp}{g}_{\mathrm{LM}}}{\partial y^{\mathrm{B}}} \right] \mathrm{T}_{\mathrm{A}}\,. \end{aligned} \tag{43}$$

Confrontando (41) e (43) si vede che è:

$$\tilde{\nabla}^*_\sigma \mathrm{T}_\rho x^\rho_{\mathrm{L}} x^\sigma_{\mathrm{M}} = \mathrm{T}^*_{\mathrm{L|M}}\,. \tag{44}$$

La (44), tenuto conto di (42), porge:

$$(\tilde{\nabla}^*_\sigma \mathrm{T}_\rho) x^\rho_{\mathrm{L}} x^\sigma_{\mathrm{M}} = (\mathrm{T}_{\tau/\mu} \overset{\perp}{g}{}^\tau_\rho \overset{\perp}{g}{}^\mu_\sigma) x^\rho_{\mathrm{L}} x^\sigma_{\mathrm{M}}\,. \tag{45}$$

Da (31), (33), (37) segue la spazialità di $\tilde{\nabla}^*_\sigma \mathrm{T}_\rho$ rispetto ad entrambi gli indici. Ciò detto da (30) e (45) segue immediatamente:

$$\tilde{\nabla}^*_\sigma \mathrm{T}_\rho = \mathrm{T}_{\tau/\mu} \overset{\perp}{g}{}^\tau_\rho \overset{\perp}{g}{}^\mu_\sigma \tag{46}$$

e resta così ridimostrato il teorema di Cattaneo [5] e in particolare il carattere tensoriale di $\tilde{\nabla}^*_\sigma \mathrm{T}_\rho$ rispetto alle trasformazioni fra coordinate spaziotemporali solidali.

Da (44), tenuto conto di (30) e della spazialità di $\tilde{\nabla}^*_\sigma \mathrm{T}_\rho$, segue:

$$\tilde{\nabla}^*_{\mathrm{M}} \mathrm{T}_{\mathrm{L}} = \mathrm{T}^*_{\mathrm{L|M}}\,. \tag{47}$$

Resta così provata la coincidenza delle nove componenti significative delle due derivate.

BIBLIOGRAFIA

[1] CARLO CATTANEO, *Introduzione alla teoria einsteniana della gravitazione*, Libreria Eredi Virgilio Veschi, Roma.

[2] ANTONIO GRIOLI, *Su una derivata interessante la teoria relativistica dei materiali non semplici*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », *45* (1971).

[3] ALDO BRESSAN, *Cinematica dei sistemi continui in relatività generale*, « Ann. Mat. pura e appl. », *62*, *99* (1963).

[4] ALDO BRESSAN, *Elasticità relativistica con coppie di contatto*, « Ricerche di matematica ».

(5) Vedi [1], pag. 164 e segg.