Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alessandro Silva

Un teorema di passaggio al limite per la coomologia di una varietà analitica complessa

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.1, p. 43–44.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_1_43_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Geometria. — *Un teorema di passaggio al limite per la coomologia di una varietà analitica complessa.* Nota di ALESSANDRO SILVA, presentata (*) dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — Let X be a complex analytic manifold. $\{X_i\}$ an increasing sequence of relatively compact open domains such that $X = \cup X_i$, $\mathcal{F}$ a locally free coherent analytic sheaf on X, then we prove that if $H^r(X_i, \mathcal{F}) = 0$ for every $r \geq q$, $q \geq 1$ fixed, we have also $H^r(X, \mathcal{F}) = 0$ for every $r \geq q$.

§ 1. Villani in [5] pone il seguente problema: sia X uno spazio analitico complesso unione di una successione crescente $\{X_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ di sottospazi aperti, $\mathcal{F}$ un fascio analitico coerente su X, $q \geq 1$ un intero fissato. Allora se $H^r(X_i, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $r \geq q$, si ha anche $H^r(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $r \geq q$?

È facile provare, con un ragionamento standard che fa uso della risoluzione canonica fiacca di $\mathcal{F}$, che si ha sempre $H^r(X, \mathcal{F}) = 0$ per $r \geq q + 1$.

Per $r = q$, Cassa in [1] prova che $\check{H}^q(X, \mathcal{F}) = 0$ ove con $\check{H}^{\cdot}(X, \mathcal{F})$ si denota la coomologia separata a valori in $\mathcal{F}$, cioè lo spazio vettoriale topologico separato associato ad $H^{\cdot}(X, \mathcal{F})$.

In questa Nota si prova che il problema ha risposta affermativa per X varietà ed $\mathcal{F}$ fascio localmente libero di tipo finito. Questo risultato migliora quanto ottenuto da Kajiwara–Yoshida in [2], ove il problema viene risolto per $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ e X varietà, sotto l'ulteriore ipotesi che X sia immersa in un più ampio ambiente di Stein.

§ 2. Sia X una varietà analitica complessa, numerabile all'infinito, $\mathcal{F}$ un fascio analitico su X localmente libero e di tipo finito. Si può allora considerare un fibrato vettoriale olomorfo F tale che $\mathcal{F}$ ne sia il fascio dei germi delle sezioni olomorfe. Sia Λ^q, $q \geq 0$ il fibrato delle forme differenziali di tipo $(0, q)$ su X. Denotiamo con E^q lo spazio vettoriale topologico delle sezioni $\mathcal{C}^\infty$ del fibrato $\Lambda^q \otimes F$. L'operatore differenziale $\bar{\partial} : \Lambda^q \to \Lambda^{q+1}$ induce un operatore differenziale $\bar{\partial}_q : \Lambda^q \otimes F \to \Lambda^{q+1} \otimes F$ e quindi un complesso di applicazioni continue di spazi vettoriali topologici:

$$E^0 \xrightarrow{\bar{\partial}_0} E^1 \xrightarrow{\bar{\partial}_1} E^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{q-1} \xrightarrow{\bar{\partial}_{q-1}} E^q \longrightarrow \cdots$$

Consideriamo ora due spazi di Fréchet su $\mathbf{C}$, F_1 e F_2 e un morfismo $f : F_1 \to F_2$. Diremo che il morfismo f è diretto se esiste un morfismo $s : F_2 \to F_1$ tale che $fs = 1_{F_2}$, cioè, in altri termini, se f ha un'inversa a destra lineare continua.

Si prova in [4] che se X è una varietà $\mathcal{C}^\infty$, connessa, numerabile all'infinito, F_1, F_2 due $\mathbf{C}$–fibrati vettoriali $\mathcal{C}^\infty$ su X tali che $\Gamma(X, F_1)$ e $\Gamma(X, F_2)$ siano

(*) Nella seduta del 12 gennaio 1974.

degli spazi di Fréchet–Montel e D un (F_1, F_2)–operatore differenziale che sia un morfismo diretto, allora $\Gamma(X, \operatorname{Ker} D)$ è un $\mathbf{C}$–spazio vettoriale di dimensione finita.

Applichiamo questo risultato al problema citato nel § 1, provando il seguente:

TEOREMA. *Siano* X *una varietà complessa connessa, numerabile all'infinito,* $q \geq 1$ *un intero fissato,* $\mathcal{F} \in Coh(X)$ *localmente libero, tali che*:

(i) $X = \cup X_i$, X_i *aperta in* X *per ogni* i e $X_i \subset\subset X_{i+1}$;

(ii) $H^r(X_i, \mathcal{F}) = 0$ *per ogni* i *e per ogni* $r \geq q$.

Allora anche $H^r(X, \mathcal{F}) = 0$ *per ogni* $r \geq q$.

Il teorema risulta provato se si fa vedere che in tale situazione $\bar\partial_q : E^q \to E^{q+1}$ è un morfismo diretto. Infatti come osservato nel § 1, si ha:

$$H^r(X, \mathcal{F}) = 0 \qquad \text{per ogni } r \geq q+1 \text{ e } \check{H}^q(X, \mathcal{F}) = 0.$$

Resta da provare che $\check{H}^q(X, \mathcal{F}) = H^q(X, \mathcal{F})$. Ora, se $\bar\partial_q$ è un morfismo diretto, $\Gamma(X, \ker \bar\partial_q)$ ha dimensione finita, da cui $H^q(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \ker \bar\partial_q)/ /\Gamma(X, \operatorname{Im} \bar\partial_{q-1})$ è di Hausdorff, da cui $H^q(X, \mathcal{F}) = \check{H}^q(X, \mathcal{F})$.

Che $\bar\partial_q$ sia un morfismo diretto, discende dal seguente criterio dovuto a Palamodov [3]:

affinché $\bar\partial_q$ sia un morfismo diretto è necessario e sufficiente che valgano simultaneamente le seguenti condizioni:

(1) per ogni dominio $U \subset\subset X$, esiste un dominio $V \subset\subset X$ contenente U tale che gli omomorfismi di restrizione $H^q(W, \mathcal{F}) \to H^q(U, \mathcal{F})$ hanno la stessa immagine per ogni dominio $W \subset\subset X$, contenente V.

(2) lo spazio $H^{q+1}(X, \mathcal{F})$ è separato.

Infatti nella nostra situazione, la condizione (2) è verificata per le osservazioni fatte inizialmente. Quanto alla (1), per ogni dominio $U, U \subset\subset X$, esiste un intero $j \in \mathbf{N}$ tale che $\bar{U} \subset X_j$, quindi per ogni dominio $W \subset\subset X$, $W \supset X_j$, l'omomorfismo di restrizione $H^q(W, \mathcal{F}) \to H^q(U, \mathcal{F})$ che si fattorizza in $H^q(W, \mathcal{F}) \to H^q(X_j, \mathcal{F}) \to H^q(U, \mathcal{F})$ ha immagine nulla.

BIBLIOGRAFIA

[1] CASSA A., *Coomologia separata sulle varietà analitiche complesse*, «Annali Scuola Normale Superiore», *25*, 291–323 (1971).

[2] KAJIWARA-YOSHIDA, *Note on Cauchy–Riemann Equation*, «Memoirs of Fac. of Sciences, Kyushu Univ.», ser. A, *22* (1968).

[3] PALAMODOV V. P., *On a Stein manifold the Dolbeault complex splits in positive dimensions*, «Mat. Sbornik», *88*, (2) 287–315 (1972). Trad. inglese in «Math. USSR Sbornik», *17* (2), 289–316 (1972).

[4] POLY J. B., *Sur les opérateurs différentiels et les morphismes directs*, «C. R. Acad. Sciences Paris», *270*, 647–649 (1970).

[5] VILLANI V., *Un teorema di passaggio al limite per la coomologia degli spazi complessi*, «Rend. Cl. di Sc. fis. mat. e nat., Accad. Naz. dei Lincei», ser. VIII, *45*, 168–170 (1967).