ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ALESSANDRO SCARSELLI

Generalizzazione di un teorema di Zappa sulle S-partizioni

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.1, p. 5–9.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_1_5_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Algebra. — *Generalizzazione di un teorema di Zappa sulle S–partizioni* (*). Nota di ALESSANDRO SCARSELLI, presentata (**) dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — This paper concerns some questions about S–partitions of finite soluble groups, and solves a problem proposed by G. Zappa in a recent Mathematical Symposium.

In un recente Convegno Matematico [1] G. Zappa ([8]) comunicò un nuovo risultato sulle S–partizioni nei gruppi finiti risolubili.

Precisamente egli ha provato che, se G è un gruppo finito risolubile, S un suo sottogruppo di Sylow anti–normale, Π una S–partizione di G, regolare, semistretta, separata e di Hall, allora Π è di scissione.

Nella presente Nota viene mostrato che la tesi del teorema continua a sussistere anche nelle ipotesi che S sia semplicemente di Hall, relativamente a un insieme ω di numeri primi e Π sia costituito da ω'–sottogruppi di G, non necessariamente di Hall.

Si mostra infine che, se Π è di Hall, l'ipotesi di regolarità è necessaria affinché valga la tesi.

1. Sia G un gruppo finito, S un sottogruppo di G e $\Pi \equiv \{H_i\}$ $(i = 1, \cdots, n)$ un insieme di sottogruppi di G; allora Π è detto una S–partizione di G, se ogni elemento di G, non appartenente a S, appartiene a uno e uno solo dei complessi SH_i.

Se $S = \langle 1 \rangle$, allora una S–partizione di G si dice semplicemente una partizione di G.

Se $\Pi \equiv \{ H_i \}$ è una S–partizione di G, allora Π è detta:

(i) banale se, al più uno degli H_i non è contenuto in S;

(ii) semistretta se $(|H_i|, |S|) = |H_i \cap S|$ per ogni H_i,

(iii) separata se $H_i \cap S = \langle 1 \rangle$ per ogni H_i;

(iv) di Hall se ogni H_i è di Hall in G;

(v) regolare se per ogni $x \in S$ e per ogni H_i, anche $H_i^x \in \Pi$;

(vi) di scissione se $G = SN$ con N sottogruppo normale di G, $S \cap N = \langle 1 \rangle$ e Π è una partizione di N.

2. Indichiamo con ω un insieme di numeri primi e con ω' il complementare di ω nell'insieme di tutti i numeri primi.

(*) La presente ricerca è stata eseguita nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 gennaio 1974.

(1) Quando questa Nota è stata scritta, gli Atti del Convegno erano in via di pubblicazione.

TEOREMA 1. *Sia* G *un gruppo finito risolubile*, S *un* ω*–sottogruppo di Hall di* G *e* Π *una* S*–partizione di* G, *regolare, semistretta e separata. Allora* Π *è di scissione.*

Dimostrazione. Se G ha ordine primo, il teorema vale banalmente.

Sia G un controesempio di ordine minimo e sia M un sottogruppo normale massimale di G.

Poiché G è risolubile, l'indice di M in G è un numero primo p.

Sia $p \in \omega$, allora M contiene un ω'–sottogruppo di Hall di G e quindi tutti, essendo M normale in G e gli ω'–sottogruppi di Hall di G coniugati.

Se H è in Π, allora H è un ω'–sottogruppo di G ed è quindi contenuto in un ω'–sottogruppo di Hall di G, cioè H è contenuto in M.

$S \cap M$ è un ω–sottogruppo di Hall di M, essendo M normale in G e S un ω–sottogruppo di Hall di G.

Sia $x \in M \setminus S \cap M$, allora $x \notin S$ e quindi esiste esattamente un elemento H di Π con $x \in SH$.

Sia $x = sh$ con $s \in S$ e $h \in H$; poiché x ed h appartengono ad M, anche $s \in M$, onde $s \in S \cap M$ e $x \in (S \cap M) H$.

Si conclude che Π è una $(S \cap M)$–partizione semistretta, separata e, ovviamente, regolare di M.

Poiché M ha ordine minore di G e G è un minimo controesempio, allora Π è una $(S \cap M)$–partizione di scissione di M, cioè M ha un ω'–sottogruppo di Hall normale N e Π è una partizione di N.

Essendo $p \in \omega$, allora N è un ω'–sottogruppo di Hall di G ed è normale in G, essendo caratteristico in M.

In definitiva Π è una S–partizione di scissione di G.

Sarà allora $p \in \omega'$ ed S un ω–sottogruppo di Hall di M.

Consideriamo l'insieme Π_1 i cui elementi sono le intersezioni degli elementi di Π con M.

Sia $x \in M \setminus S$, allora in Π vi è esattamente un elemento H con $x \in SH$, sia $x = sh$ con $s \in S$ e $h \in H$, poiché x ed s appartengono ad M, anche $h \in M$, cioè $h \in H \cap M$ e $x \in S(H \cap M)$.

Si conclude che Π_1 è una S–partizione di M.

Sia $y \in S$ e C un elemento di Π_1; sarà $C = H \cap M$ con H in Π, ed è $(H \cap M)^y = H^y \cap M$; ma Π è regolare e quindi $H^y \in \Pi$ e $H^y \cap M \in \Pi_1$, cioè Π_1 è una S–partizione regolare di M, ovviamente semistretta e separata.

Poiché M ha ordine minore di G e G è un minimo controesempio, allora Π_1 è di scissione, cioè M ha un ω'–sottogruppo di Hall normale K e Π_1 è una partizione di K.

K è normale in G, essendo caratteristico in M, ed è contenuto in ogni ω'–sottogruppo di Hall di G; esso ha inoltre indice p in ogni ω–sottogruppo di Hall di G.

K è l'ω'–sottogruppo normale massimo di G; in caso contrario G avrebbe un ω'–sottogruppo di Hall normale N.

Se $x \in N$ e $x \neq 1$, allora $x \notin S$, e quindi esiste esattamente un elemento H di Π con $x \in SH$, ma N contiene ogni ω'–sottogruppo di G e quindi è $H \subseteq N$, ed essendo $S \cap N = \langle 1 \rangle$, $x \in H$; cioè Π è una partizione di N ed è quindi una S–partizione di scissione di G, in contraddizione col fatto che G è un controesempio.

Essendo K l'ω'–sottogruppo normale massimo di G, S non può normalizzare alcun elemento di Π, che non sia contenuto in K.

Infatti, se H è in Π e $H \not\subseteq K$, allora HK è un ω'–sottogruppo di Hall di G e quindi se S normalizzasse H, HK risulterebbe un ω'–sottogruppo normale di G, contenente propriamente K.

Poiché S è un ω–sottogruppo di Hall di G ed è contenuto nel sottogruppo normale M, si ha $G = N(S)M$, ove $N(S)$ è il normalizzante di S in G.

Essendo $M \neq G$, in $N(S)$ si deve essere un elemento v con $v \notin M$.

Sia $v \in SH$ con H in Π e sia $v = sh$ con $s \in S$ e $h \in H$; allora $vh^{-1} \in S$ e, poiché $v \in N(S)$, anche $h \in N(S)$.

Poiché $s \in M$ e $v \notin M$, neppure h appartiene ad M, cioè $H \not\subseteq M$ e quindi $H \not\subseteq K$.

Allora deve esistere un elemento $y \in S$ con $H^y \neq H$ e H^y è in Π, essendo Π regolare.

Si deve avere $SH \cap SH^y = S$, essendo Π una S–partizione di G.

Ma $hy = (yy^{-1})\, hy = y\,(y^{-1}\, hy) \in SH^y$ e, d'altra parte, deve esistere un elemento $y_1 \in S$ con $hy = y_1 h$, essendo $h \in N(S)$; cioè $hy \in SH$.

Allora $hy \in SH \cap SH^y$ e quindi $hy \in S$, ma $y \in S$ e quindi $h \in S$, cioè è $h = 1$, in contraddizione col fatto che $h \notin M$ e tale contraddizione stabilisce la validità del teorema.

3. Ricordiamo che un gruppo finito G, si dice di Frobenius se ha un sottogruppo proprio H, tale che $H^x \cap H = \langle 1 \rangle$, per ogni $x \in G$, con $x \notin H$.

Gli elementi di G che non appartengono ad alcun coniugato di H, insieme con l'elemento neutro di G, costituiscono un sottogruppo normale K di Hall in G, detto nucleo di Frobenius di G.

H e i suoi coniugati vengono detti complementi di Frobenius di G.

In conseguenza di un teorema di J. G. Thompson ([6]), K è nilpotente ed inoltre si ha che K è l'unico nucleo di Frobenius di G (Scott ([5]), Teorema 12.6.12).

Il nucleo di Frobenius di G e i complementi di Frobenius di G, costituiscono una partizione di G, detta partizione principale di Frobenius di G.

Un gruppo finito G viene detto di Hughes e Thompson relativo al numero primo p, se G non è un p–gruppo e gli elementi di G che non hanno periodo p, generano un sottogruppo H_p di G d'indice p in G.

Si verifica facilmente che, se $(|H_p|, p) = 1$, allora G è di Frobenius e H_p è il nucleo di Frobenius di G.

In ogni caso H_p è nilpotente (Kegel ([3])).

Se G è un gruppo finito, l'unione dei sottogruppi normali e nilpotenti di G è un sottogruppo normale e nilpotente di G, detto sottogruppo di Fitting di G e indicato con F (G).

Da Baer (([1]) e ([2])) e Kegel ([4]), risulta che un gruppo finito G, con $F(G) \neq \langle 1 \rangle$, ammette una partizione non banale solo se appartiene ad una delle seguenti classi:

(i) p–gruppi;
(ii) gruppi di Frobenius;
(iii) gruppi di Hughes e Thompson;
(iv) S_4, cioè il gruppo totale delle permutazioni su 4 oggetti.

Di conseguenza un gruppo finito G, con $F(G) \neq \langle 1 \rangle$, ha una partizione di Hall non banale, se e solo se è di Frobenius.

Infatti un p–gruppo non ha partizioni di Hall non banali e neppure S_4 ne ha.

Sia G un gruppo di Hughes e Thompson relativo al numero primo p e Π una partizione di Hall non banale di G.

Le intersezioni degli elementi di Π con H_p, costituiscono una partizione di Hall di H_p, ed essendo H_p nilpotente e Π non banale, si conclude che H_p è un elemento di Π, cioè H_p è di Hall in G.

Allora è $(|H_p|, p) = 1$ è quindi G è di Frobenius.

D'altra parte un gruppo di Frobenius ammette la partizione principale di Frobenius che è di Hall e non banale.

Sia ora G un gruppo di Frobenius, K il nucleo di Frobenius di G e Π una partizione di Hall non banale di G.

Le intersezioni degli elementi di Π con K costituiscono una partizione di Hall di K, necessariamente banale, essendo K nilpotente; cioè K è contenuto in un elemento di Π.

Da Baer ([1]) risulta che, se H è un complemento di Frobenius di G, esso è contenuto in un elemento di Π e si conclude quindi che K è in Π e Π è la partizione principale di Frobenius di G (Zappa ([7])).

In conclusione, considerando che un gruppo finito risolubile non identico ha il sottogruppo di Fitting non identico, si ha:

LEMMA. *Se* G *è un gruppo finito risolubile e* Π *è una partizione di Hall, non banale, di* G, *allora* G *è di Frobenius e* Π *è la partizione principale di Frobenius di* G.

Sia ora G un gruppo finito risolubile con un ω'–sottogruppo di Hall normale N e sia Π una partizione di Hall di N.

Se S è un ω–sottogruppo di Hall di G, allora Π è, ovviamente una S–partizione di G.

Se Π è banale, allora Π è regolare, essendo N normale in G.

Se Π non è banale, allora, per il Lemma, N è un gruppo di Frobenius e Π è la partizione principale di Frobenius di N.

Sia $x \in S$, allora, se K è il nucleo di Frobenius di N, è $K^x = K$, essendo K caratteristico in N; se H è un complemento di Frobenius di N, allora H^x

è contenuto in N ed è quindi un complemento di Frobenius di N; cioè Π è regolare.

Riassumendo, in conseguenza del Teorema 1 e del Lemma, si ha:

TEOREMA 2. *Sia* G *un gruppo finito risolubile,* S *un* ω*–sottogruppo di Hall di* G *e* Π *una* S*–partizione regolare, semistretta, separata e di Hall di* G; *allora è* G = SN *con* N ω'*–sottogruppo di Hall normale e* Π *è una partizione di Hall di* N; *inoltre se* Π *non è banale,* N *è di Frobenius e* Π *è la partizione principale di Frobenius di* N.

Viceversa se G *è un gruppo finito risolubile con un* ω'*–sottogruppo di Hall normale* N *e* Π *è una partizione di Hall di* N, *allora, detto* S *un* ω*–sottogruppo di Hall di* G, Π *è una* S*–partizione semistretta, separata, di Hall e regolare di* G.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BAER, *Partitionen endlicher Gruppen,* «Math. Z.», 75, 333–372 (1961).
[2] R. BAER, *Einfache Partitionen endlicher Gruppen mit nicht-trivialer Fittingscher Untergruppe,* «Arch. der. Math.», *12*, 81–89 (1961).
[3] O. H. KEGEL, *Die Nilpotenz der* H_p*–Gruppen,* «Math. Z.», 75, 373–376 (1961).
[4] O. H. KEGEL, *Nicht-einfache Partitionen endlicher Gruppen,* «Arch. der. Math.», *12*, 170–175 (1961).
[5] W. R. SCOTT, *Group Theory,* Prentice Hall, Englewood, Cliffs, N. J., 1964.
[6] J. G. THOMPSON, *Finite Groups with fixed-point-free automorphism of prime order,* «Proc. Nat. Acad. Sci., USA», *45*, 578–581 (1959).
[7] G. ZAPPA, *Partizioni ed* S*–partizioni dei gruppi finiti,* «Symposia Mathematica, Ist. Naz. di Alta Mat.», *1*, 85–94 (1968).
[8] G. ZAPPA, *Partizioni generalizzate dei gruppi,* «Atti del Symposium sulla Matematica Combinatoria», Roma, Accademia Nazionale dei Lincei, Settembre 1973 (in corso di stampa).