Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Aurel Bejancu

Théorèmes d'immersion pour certains groupes de Lie-Banach

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.3, p. 326–331.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_3_326_0>

Teoria dei gruppi. — *Théorèmes d'immersion pour certains groupes de Lie-Banach.* Nota di AUREL BEJANCU, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Utilizzando la teoria delle forme differenziali a valori in uno spazio di Banach, si ottengono delle condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di un'immersione globale di un gruppo di Lie–Banach semplicemente connesso in un altro analogo gruppo assegnato.

Dans la Note présente, nous obtenons, à l'aide des formes différentielles banachiques [1], des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une immersion globale d'un groupe de Lie–Banach dans un autre.

Soient H un groupe de Lie–Banach connexe, simplement connexe de classe C^∞ modelé par l'espace de Banach $\mathbf{F}$, et G un groupe de Lie–Banach modelé par $\mathbf{E}$. Dans ce qui suite nous supposons que ξ est un isomorphisme linéaire continu de $\mathbf{F}$ sur un sous–espace fermé dans $\mathbf{E}$, qui a un complément direct dans $\mathbf{E}$. Nous désignons par ω_H (resp. ω_G) la forme linéaire banachique invariante à gauche sur H (resp. G) et par C_H (resp. C_G) le tenseur de structure de H (resp. G) [1]. Soit (U, φ) (resp. (V, ψ)) une carte locale dans l'unité $e \in H$ (resp. $\bar{e} \in G$), telle que $\varphi(e) = 0$ (resp. $\psi(\bar{e}) = 0$). Nous allons utiliser dans ce qui suit les parties principales des formes ω_H et ω_G dans ces cartes.

THÉORÈME 1. *L'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = \omega_G^{-1}(y) \circ \xi \circ \omega_H(x) , \tag{1}$$

est c.i. (*complétement intègrable*), *si et seulement si*, *les tenseurs de structure vérifient la relation*

$$C_G \circ (\xi \times \xi) = \xi \circ C_H . \tag{2}$$

Démonstration. Supposons que la relation (2) a lieu. En utilisant l'expression locale du tenseur de structure d'un groupe de Lie–Banach [1], nous obtenons

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \omega_G}{\partial y}\right)(y , \omega_G^{-1}(y , \xi(u)))\,(\omega_G^{-1}(y , \xi(v))) - \\ &-\left(\frac{\partial \omega_G}{\partial y}\right)(y , \omega_G^{-1}(y , \xi(v)))\,(\omega_G^{-1}(y , \xi(u))) = \\ &= \xi\left\{\left(\frac{\partial \omega_H}{\partial x}\right)(x , \omega_H^{-1}(x , u))\,(\omega_H^{-1}(x , v)) - \right. \\ &\left. -\left(\frac{\partial \omega_H}{\partial x}\right)(x , \omega_H^{-1}(x , v))\,(\omega_H^{-1}(x , u))\right\} \end{aligned} \tag{3}$$

(*) Nella seduta del 9 marzo 1974.

pour tout $u, v \in \mathbf{F}$. En calculant la différentielle Fréchet de la relation

$$\omega_G(y, \omega_G^{-1}(y, \xi(u))) = \xi(u)$$

par rapport à y, en direction $\omega_G^{-1}(y, \xi(v))$, nous obtenons

$$\left(\frac{\partial \omega_G}{\partial y}\right)(y, \omega_G^{-1}(y, \xi(u)))(\omega_G^{-1}(y, \xi(v))) = \tag{4}$$

$$= -\omega_G\left(y, \left(\frac{\partial \omega_G^{-1}}{\partial y}\right)(y, \xi(u))(\omega_G^{-1}(y, \xi(v)))\right).$$

Tenant compte de (4) dans (3), on a:

$$\omega_G\left(y, \left(\frac{\partial \omega_G^{-1}}{\partial y}\right)(y, \xi(v))(\omega_G^{-1}(y, \xi(u)))\right) -$$

$$-\omega_G\left(y, \left(\frac{\partial \omega_G^{-1}}{\partial y}\right)(y, \xi(u))(\omega_G^{-1}(y, \xi(v)))\right) =$$

$$= \xi\left\{\left(\frac{\partial \omega_H}{\partial x}\right)(x, \omega_H^{-1}(x, u))(\omega_H^{-1}(x, v)) -\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial \omega_H}{\partial x}\right)(x, \omega_H^{-1}(x, v))(\omega_H^{-1}(x, u))\right\}.$$

Mais $\omega_G(y)$ est un automorphisme linéaire continu de $\mathbf{E}$ et donc:

$$\omega_G\left(y, \xi\left(\left(\frac{\partial \omega_H}{\partial x}\right)(x, \omega_H^{-1}(x, u))(\omega_H^{-1}(x, v))\right)\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial \omega_G^{-1}}{\partial y}\right)(y, \xi(u))(\omega_G^{-1}(y, \xi(v))) =$$

$$= \omega_G\left(y, \xi\left(\left(\frac{\partial \omega_H}{\partial x}\right)(x, \omega_H^{-1}(x, v))(\omega_H^{-1}(x, u))\right)\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial \omega_G^{-1}}{\partial y}\right)(y, \xi(v))(\omega_G^{-1}(y, \xi(u))).$$

Ensuite, nous remplaçons dans cette relation u et v respectivement par $\omega_H(x, u)$ et $\omega_H(x, v)$ et obtenons:

$$\omega_G^{-1}\left(y, \xi\left(\left(\frac{\partial \omega_H}{\partial x}\right)(x, u)(v)\right)\right) + \tag{5}$$

$$+\left(\frac{\partial \omega_G^{-1}}{\partial y}\right)(y, \xi(\omega_H(x, u)))(\omega_G^{-1}(y, \xi(\omega_H(x, v)))) =$$

$$= \omega_G^{-1}\left(y, \xi\left(\left(\frac{\partial \omega_H}{\partial x}\right)(x, v)(u)\right)\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial \omega_G^{-1}}{\partial y}\right)(y, \xi(\omega_H(x, v)))(\omega_G^{-1}(y, \xi(\omega_H(x, u)))).$$

Si l'on désigne par $f(x, y)$ le second membre de l'équation différentielle (1), il est aisé de voir que

$$\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y)(u)\right\}(v) = \omega_G^{-1}\left(y, \xi\left(\left(\frac{\partial \omega_H}{\partial x}\right)(x, v)(u)\right)\right),$$

$$\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y)(f(x, y)(u))\right\}(v) =$$

$$= \left(\frac{\partial \omega_G^{-1}}{\partial y}\right)(y, \xi(\omega_H(x, v)))(\omega_G^{-1}(y, \xi(\omega_H(x, u)))) .$$

En vertu de ces relations, de (5) on déduit:

$$\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \circ f(x, y)\right)(u)\right\}(v) = \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \circ f(x, y)\right)(v)\right\}(u),$$

c'est-à dire, nous avons obtenu la condition d'intégrabilité complète de l'équation différentielle (1) ([5], p. 107).

Puisque toutes les étapes de cette démonstration sont réversibles, la réciproque est évidente. *q.e.d.*

Pour un groupe de Lie–Banach nous avons introduit les formes banachiques invariantes à droite ([1], [4]). Soient τ_H (resp. τ_G) cette forme et K_H (resp. K_G) le tenseur de structure pour H (resp. G). Nous avons démontré [3]:

$$C_H + K_H = 0 \quad , \quad C_G + K_G = 0. \tag{6}$$

THÉORÈME 2. *L'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = \tau_G^{-1}(y) \circ \xi \circ \tau_H(x), \tag{7}$$

est c.i., si et seulement si, l'équation (1) *est c.i.*

Démonstration. D'une manière analogue à la démonstration du Théorème 1, on démontre que l'équation (7) est c.i., si et seulement si, on a:

$$K_G \circ (\xi \times \xi) = \xi \circ K_H . \tag{8}$$

Mais (8) et (2) sont équivalentes, compte tenu de (6), et alors le Théorème 1 démontre ce théorème.

PROPOSITION 1. *Les équations différentielles* (1) *et* (7) *ont une solution commune* $y = g(x)$ *ayant les conditions initialles* (0, 0).

Démonstration. Soit $y = h(x)$ la solution de l'équation (1) ayant les conditions initialles (0, 0). On sait [1] que $\omega_H(0) = id_{\mathbf{F}}$ $\omega_G(0) = id_{\mathbf{E}}$. Donc $D_0 h = \xi$. Soit $y = k(x)$ la solution de l'équation (7) avec $k(0) = 0$. Puisque $\tau_H(0) = id_{\mathbf{F}}$ et $\tau_G(0) = id_{\mathbf{E}}$, nous obtenons $D_0 k = \xi$. Donc h et k coincident sur une voisinage de l'origine. On désigne par $y = g(x)$ leur restriction à ce voisinage, et elle est alors la solution commune. *q.e.d.*

Soient, W le domaine de g et π (resp. γ) la loi de composition du H (resp. G).

PROPOSITION 2. *Pour tout* $a \in W$, *l'application* $g \circ L_a$ *est une solution pour l'équation* (1).

Démonstration. Pour tout $x \in \varphi(U)$ tel que $\pi(a, x) \in W$ on a:

$$D_x(g \circ L_a) = \omega_G^{-1}((g \circ L_a)(x)) \circ \xi \circ \omega_H(\pi(a, x)) \circ D_x L_a .$$

Mais $\omega_H(y) = D_y L_{y^{-1}}$ et alors:

$$D_x(g \circ L_a) = \omega_G^{-1}((g \circ L_a)(x)) \circ \xi \circ D_{\pi(a,x)}(L_{x^{-1}} \circ L_{a^{-1}}) \circ D_x L_a =$$
$$= \omega_G^{-1}((g \circ L_a)(x)) \circ \xi \circ \omega_H(x) . \qquad q.e.d.$$

Pour W il existe une boule S centrée en origine, telle que

$$\pi(x, y) \in W \qquad \forall x, y \in S.$$

La solution $y_1 = g \circ L_a$ a les conditions initiales $(0, g(a))$. Pour tout $x \in S$, on a:

$$D_x(L_{g(a)} \circ g) = D_{g(x)} L_{g(a)} \circ D_x g .$$

Nous avons montré [1]:

$$D_{g(x)} L_{g(a)} = \omega_G^{-1}((L_{g(a)} \circ g)(x)) \circ \omega_G(g(x))$$

et alors:

$$D_x(L_{g(a)} \circ g) = \omega_G^{-1}((L_{g(a)} \circ g)(x)) \circ \xi \circ \omega_H(x) ,$$

c'est-à-dire, $y_2 = L_{g(a)} \circ g$ est une autre solution pour (1) ayant les mêmes conditions initiales $(0, g(a))$. Donc y_1 et y_2 coïncident sur S, c'est-à-dire nous avons démontré la

PROPOSITION 3. *Il existe une boule* S *centrée en origine*, *telle que*

$$g(\pi(a, x)) = \gamma(g(a), g(x)) \qquad \forall a, x \in S.$$

Donc $h = \Phi^{-1} \circ g \circ \varphi$ est un homomorphisme local de H dans G. Mais H est un groupe topologique connexe, localement connexe, simplement connexe et alors h possède une extension f continue et unique ([8], p. 135). B. Maissen a démontré que chaque homomorphisme continu entre deux groupes de Lie-Banach est analitique [7]. Donc f est un homomorphisme de groupes de Lie-Banach.

DÉFINITION. Une C^∞-application $f: H \to G$, s'appelle hom-immersion de H dans G, si et seulement si, on a les conditions suivantes:

1) f est un homomorphisme de groupes de Lie-Banach [7].

2) f est une immersion de la variété H dans G ([6], p. 20).

PROPOSITION 4. *Si l'équation différentielle* (1) *est c.i. alors il existe une hom-immersion unique del* H *dans* G.

Démonstration. Nous avons vu que f est un homomorphisme de H dans G. Il rest de montrer que f est une immersion. H est connexe et donc pour tout $x \in \mathrm{H}$ on a:

$$x = \pi(x_1, \pi(x_2, \cdots, \pi(x_{n-1}, x_n), \cdots,)) \qquad x_i \in \varphi^{-1}(\mathrm{S}) \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$f(x) = \gamma(f(x_1), \gamma(f(x_2), \cdots, \gamma(f(x_{n-1}, x_n)), \cdots)).$$

Mais $f_{|\varphi^{-1}(\mathrm{S})} = h$, honc:

$$f(x) = \gamma(h(x_1), \gamma(h(x_2), \cdots, \gamma(h(x_{n-1}), h(x_n)), \cdots,)). \tag{9}$$

Si nous désignons $\mathrm{M} = \mathrm{L}_{\pi(x_1, \cdots, \pi(x_{n-2}, x_{n-1}))}(\varphi^{-1}(\mathrm{S}))$ il est clair que:

$$f_{|\mathrm{M}} = \mathrm{L}_{\gamma(h(x_1), \cdots, \gamma(h(x_{n-2}), (h(x_{n-1})), \cdots,)} \circ h \circ [\mathrm{L}_{\pi(x_1, \cdots, \pi(x_{n-2}, x_{n-1}), \cdots)}]^{-1}$$

Puisque g est une solution de l'équation (1), il est aisé de voir que h est une immersion sur $\mathrm{L}_{\pi(x_1, \cdots, \pi(x_{n-2}, x_{n-1}), \cdots)(\mathrm{M})}$. Les translations à gauche sur un groupe de Lie–Banach sont des différomorphismes et donc $f_{|\mathrm{M}}$ est une immersion dans x. L'unicité est évidente de (9). *q.e.d.*

PROPOSITION 5. *Si $f: \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ est une hom–immersion, alors il existe un isomorphisme linéaire continu ξ de* **F** *sur un sous–espace fermé dans* **E**, *qui a un complément direct dans* **E** *et l'équation* (1) *est c.i.*

Démonstration. Si $h = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$, $\xi = \mathrm{D}_0 h$, ayant en vue que f est une immersion, la première partie de la proposition est évident. On sait que:

$$\omega_{\mathrm{G}}(f(x)) \circ \mathrm{T}_x f = \mathrm{T}_x(\mathrm{L}_{f(x^{-1})} \circ f) \qquad \forall x \in \mathrm{H}.$$

Mais $\mathrm{L}_{f(x^{-1})} \circ f = f \circ \mathrm{L}_{x^{-1}}$, d'où:

$$\omega_{\mathrm{G}}(f(x)) \circ \mathrm{T}_x f = \mathrm{T}_x(f \circ \mathrm{L}_{x^{-1}}).$$

Nous avons donc obtenu:

$$\mathrm{T}_e f \circ \omega_{\mathrm{H}}(x) = \omega_{\mathrm{G}}(f(x)) \circ \mathrm{T}_x f.$$

En écrivant cette relation dans deux cartes locales en $e \in \mathrm{H}$ et $\bar{e} \in \mathrm{G}$, nous obtenons:

$$\mathrm{D}_0 h(\omega_{\mathrm{H}}(x, u)) = \omega_{\mathrm{G}}(h(x), \mathrm{D}_x h(u)) \qquad \forall u \in \mathbf{F}. \tag{10}$$

On calcule la différentielle Fréchet de (10) par rapport à x, en direction v et on a:

$$\mathrm{D}_0 h\left\{\left(\frac{\partial \omega_{\mathrm{H}}}{\partial x}\right)(x, u)(v)\right\} = \left(\frac{\partial \omega_{\mathrm{G}}}{\partial y}\right)(h(x), \mathrm{D}_x h(u))(\mathrm{D}_x h(v)) + \\ + \omega_{\mathrm{G}}(h(x), \mathrm{D}_x^2 h(u, v)).$$

Cette dernière relation, tenant compte que $\mathrm{D}_x^2 h \in \mathrm{L}_2^s(\mathbf{F}; \mathbf{E})$ [6], implique

$$\mathrm{D}_0 h\left\{\left(\frac{\partial \omega_{\mathrm{H}}}{\partial x}\right)(x, u)(v) - \left(\frac{\partial \omega_{\mathrm{H}}}{\partial x}\right)(x, v)(u)\right\} = \\ = \left(\frac{\partial \omega_{\mathrm{G}}}{\partial y}\right)(h(x), \mathrm{D}_x h(u))(\mathrm{D}_x h(v)) - \left(\frac{\partial \omega_{\mathrm{G}}}{\partial y}\right)(h(x), \mathrm{D}_x h(v))(\mathrm{D}_x h(u)).$$

Si nous posons $x = e$ dans cette relation, il résulte

$$\xi \left\{ \left(\frac{\partial \omega_H}{\partial x} \right) (e , u) (v) - \left(\frac{\partial \omega_H}{\partial x} \right) (e , v) (u) \right\} =$$

$$= \left(\frac{\partial \omega_G}{\partial y} \right) (\bar{e} , \xi(u)) (\xi(v)) - \left(\frac{\partial \omega_G}{\partial y} \right) (\bar{e} , \xi(v)) (\xi(u)) .$$

En tenent compte de l'expression de tenseur de structure C [1] nous obtenons:

$$\xi(C_H(u , v)) = C_G(\xi(u) , \xi(v)) \qquad \forall u , v \in \mathbf{F} ,$$

c'est-à-dire, l'équation (1) est c.i.

Des Théorèmes 1, 2 et des Propositions 4, 5 on déduit le

THÉORÈME 3. *Un groupe de Lie-Banach* H *connexe, simplement connexe, possède une hom-immersion globale dans* G *si, et seulement si, une des conditions suivantes est vérifiée.*

1) *l'équation différentielle* (1) *est c.i.,*
2) *les tenseurs de structure* C_H *et* C_G *satisfont* (2),
3) *l'équation différentielle* (7) *est c.i,,*
4) *les tenseurs de structure* K_H *et* K_G *vérifient* (8).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BEJANCU, *Formes différentielles et groupes de Lie-Banach*, «Ann. șt. Univ. Iași», *18* (1), 125-137 (1972).
[2] A. BEJANCU, *Sur l'existence d'une structure de groupe de Lie-Banach local*, «C. R. Acad. Sc. Paris», *276*, 61-64.
[3] A. BEJANCU, *Sur la méthode d'Elie Cartan pour les groupes de Lie-Banach* (à paraître).
[4] A. BEJANCU, *Groupe de Lie-Banach* (thèse). Iași 1973.
[5] H. CARTAN, *Formes différentielles*, Hermann, Paris 1967.
[6] S. LANG, *Introduction aux variétés différentiables*, Dunod, Paris 1967.
[7] B. MAISSEN, *Lie-Gruppen mit Banachraumen als Parameterraume*, «Acta Math.», *108*, 229-269 (1962).
[8] PH. TONDEUR, *Introduction to Lie groups and transformation groups*, «Lecture Notes in Mathematics», 7, Springer, 1965.