Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Brunetto Piochi

Su certi sistemi di leggi di varietà di gruppi risolubili

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.4, p. 460–463.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_4_460_0>

Algebra. — *Su certi sistemi di leggi di varietà di gruppi risolubili* (*). Nota di BRUNETTO PIOCHI, presentata (**) dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — Let G be a supersolvable finite group or a solvable one, in which the orders of principal factors are primes or squares of primes; and let exp G divide $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$ ($p_1 > p_2 > \cdots > p_s$ prime numbers). A much simple enunciation is given for essentially known theorems on some systems of laws characterizing G; it is indeed shown that the laws 1.(1) and 1.(2) can be removed from the enunciates of such theorems, getting equivalent systems of laws characterizing G.

1. Sia $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$ ($p_1 > p_2 > \cdots > p_s$ numeri primi distinti). In [2], [4], [6] sono dimostrati alcuni teoremi che caratterizzano mediante opportuni sistemi di leggi i gruppi finiti di esponente divisore di n, che siano supersolubili, oppure risolubili con ogni fattore principale d'ordine primo o quadrato di un primo. Ciascuno di tali sistemi contiene le leggi

1.(1) $$(x_1^{n/m_i} x_2^{n/m_i})^{m_i} \qquad m_i = p_1^{a_1} \cdots p_i^{a_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, s.$$

oppure le leggi

1.(2) $$\left[[x_1, x_2]^{np_i^{-a_i}}, [x_3, x_4]^{np_j^{-a_j}}\right] \qquad i = 1, 2, \cdots, s-1, \quad j = i+1, \cdots, s.$$

Queste leggi equivalgono rispettivamente alla dispersione del gruppo (cfr. [2], 2.2) e alla nilpotenza del derivato (cfr. [6], 1.3). La loro validità serviva in modo essenziale per poter dimostrare che nel gruppo considerato ogni p-elemento del derivato è prodotto di commutatori che sono p-elementi, in base alla seguente proposizione, per la cui dimostrazione vedasi [2], 3.2 e [5], 1.1:

PROPOSIZIONE 1.1. *Se un gruppo finito* G *è disperso, oppure il suo derivato è nilpotente, ogni p-elemento del derivato è prodotto di commutatori che sono p-elementi.*

Da questa discende infatti immediatamente che:

PROPOSIZIONE 1.2. *Se* G *è un gruppo finito di esponente divisore di* n *e verificante le ipotesi di* 1,1, *ogni* p_i*-elemento del derivato di* G *è prodotto di elementi della forma* $[a, b]^{np_i^{-a_i}}$, *con* $a, b \in G$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Nella seduta del 20 aprile 1974.

In questa Nota si prova che dalla Proposizione 1.2 si possono eliminare le ipotesi di 1.1, cioè si prova che in generale in un gruppo finito di esponente divisore di n, ogni p_i–elemento del derivato è prodotto di elementi della forma $[a , b]^{np_i^{-a_i}}$.

Ciò permette di generalizzare i teoremi sopra citati, fornendo una caratterizzazione più semplice dei gruppi finiti di esponente divisore di n, che siano supersolubili, o risolubili aventi ogni fattore principale di ordine primo o quadrato di un primo. Infatti dai sistemi di leggi che compaiono nell'enunciato di detti teoremi si possono eliminare le 1.(1) e 1.(2). Così ad esempio dimostreremo che un gruppo finito G è supersolubile di esponente divisore di n, se e solo se in esso sono leggi le parole (cfr. Teorema 2.3):

$$\text{(i)} \quad x_1^n ; \qquad \text{(ii)} \quad \left[[x_1 , x_2]^{np_i^{-a_i}} , x_3^{p_i^{a_i}(p_i-1)}\right] \qquad i = 1 , \cdots , s .$$

2. LEMMA 2.1. *Sia* G *un gruppo e* p *un numero primo divisore dell'ordine di G. In* G *non esistono commutatori che sono* p*-elementi diversi da* 1, *se e solo se* G = PN, *con* P p*–sottogruppo di Sylow abeliano e N* p'*-sottogruppo di Hall normale in* G.

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che in G non esistano commutatori diversi da 1 che abbiano ordine potenza di p. Allora, anzitutto, ogni p–sottogruppo di Sylow P di G deve essere abeliano, poiché se $a , b \in \mathrm{P}$ è $[a , b] \in \mathrm{P}$ e deve allora essere $[a , b] = 1$.

Consideriamo poi il normalizzante $\mathrm{N_G(P)}$ di P in G. Sia $a \in \mathrm{N_G(P)}$ e $b \in \mathrm{P}$. Allora $[a , b] = a^{-1} b^{-1} ab = (b^{-1})^a b \in \mathrm{P}$ e ancora deve essere $[a , b] = 1$, cioè $\mathrm{N_G(P)} \subseteq \mathrm{C_G(P)}$, onde $\mathrm{N_G(P)} = \mathrm{C_G(P)}$. Ma allora $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{Z(N_G(P))}$ e quindi per un noto Teorema del Burnside P possiede un p–complemento di Sylow normale, ovvero esiste un p'–sottogruppo N di Hall di G, che è normale in G. Poiché ovviamente G = PN, è provata la prima parte del lemma.

Sia ora G = PN, con P p–sottogruppo di Sylow abeliano e N p'–sottogruppo di Hall normale in G. Allora (G/N) è isomorfo a P, cioè è abeliano. Onde $\mathrm{G}' \subseteq \mathrm{N}$ e pertanto ogni elemento di G′ è un p′–elemento; in particolare allora non esistono commutatori diversi da 1 che siano p–elementi.

c.v.d.

TEOREMA 2.2 (1). *Sia* G *un gruppo e sia* $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$ ($p_1 > p_2 > \cdots > p_s$ numeri primi distinti) *un multiplo dell'esponente di* G. *Per ogni* p_i, *qualsiasi* p_i*–elemento di* G′ *è prodotto di elementi della forma* $[a , b]^{np_i^{-a_i}}$, *con* $[a , b]$ *commutatore di* G.

(1) Tale Teorema può anche dedursi dalla teoria della fusione di Alperin, (vedi, ad es., il Teorema 4.1 di p. 251 in D. GORENSTEIN, *Finite groups*, New York, 1967). La nostra dimostrazione diretta è però molto più semplice ed elementare.

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che dalla dimostrazione del Lemma 2.1 si ricava che se in G non esistono commutatori diversi da 1 che sono p_i–elementi, non esistono p_i–elementi di G′ diversi da 1.

Detto ciò fissiamo un p_i, e chiamiamolo p. Consideriamo tutti gli elementi di G′ della forma $[a, b]^{np^{-a}}$ e sia H il sottogruppo da essi generato. H è pienamente invariate in G, poiché è sottogruppo verbale di G. Dunque, in particolare, è anche H normale in G. Distinguiamo ora due casi:

1) *caso* $H = 1$. È noto che ogni commutatore $[x, y]$ che sia un p–elemento è potenza di $[x,y]^{np^{-a}}$ ($\in$ H). Perciò se $H = 1$, non esistono commutatori in G che siano p–elementi, diversi dall'unità, e pertanto non esistono neppure p–elementi di G′ diversi da 1 e il Teorema è banalmente verificato.

2) *caso* $H \neq 1$. Poiché H è normale in G, considero (G/H). Voglio dimostrare che in (G/H) non vi sono commutatori $\neq$ da H che sono p–elementi. Supponiamo che vi siano e sia $[aH, bH]$ uno di essi e p^t $(t \leq a)$ il suo periodo. Ciò significa che

$$H = [aH, bH]^{p^t} = [a, b]^{p^t} H, \quad \text{cioè} \quad [a, b]^{p^t} \in H.$$

Consideriamo ora $[a, b]^{np^{-a}}$. Esso è in H per la definizione di H. Poiché però $(np^{-a}, p^t) = 1$, si ha che:

$[a, b] = ([a, b]^{np^{-a}})^c \, ([a, b]^{p^t})^d$ $(c, d$ interi) e poiché ognuno dei due termini del prodotto è in H, anche $[a, b] \in H$, cioè $[aH, bH] = H$. Come volevasi dimostrare, allora, in (G/H) non esistono commutatori diversi da H che sono p–elementi. Ma allora in $(G/H)' = (G'/H)$ non esistono p–elementi diversi da H.

Sia ora y un p–elemento di G′. La sua immagine nell'omomorfismo naturale di G in (G/H) è un p–elemento yH di $(G/H)'$. Ma per quanto sopra $yH = H$, cioè $y \in H$.

Perciò ogni p_i–elemento di G′ è prodotto di elementi della forma $[a, b]^{np_i^{-a_i}}$

c.v.d.

A questo punto si possono semplificare notevolmente gli enunciati di alcuni teoremi noti.

TEOREMA 2.3. *Un gruppo* G *finito è di esponente divisore di* $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$ $(p_1, p_2, \cdots, p_s$ numeri primi distinti) *e supersolubile se e solo se in esso sono leggi le parole*:

$$\text{(i)} \quad x_1^n \qquad \text{(ii)} \quad \left[[x_1, x_2]^{np_i^{-a_i}}, x_3^{p_i^{a_i}(p_i - 1)} \right] \qquad i = 1, \cdots, s$$

Dimostrazione. Se $\exp G/n$, vale la (i) e viceversa, se vale la (i), è $\exp G/n$.

Inoltre da un teorema di Baer [1] si ha che un gruppo G è supersolubile se e solo se in esso si ha (+) $[y, x^{p-1}] = 1$ per ogni p che divide $|G|$, ogni

y p–elemento di G′ e ogni x p'–elemento di G. Supponiamo ora che G sia supersolubile. Allora in esso vale la legge (ii) che è solo un caso particolare di $(+)$.

Viceversa, se in esso la parola (ii) è legge, vale la $(+)$. Infatti, in base al Teorema 2.2, ogni p–elemento y di G′ è prodotto di elementi del tipo $[a , b]^{np^{-a}}$ e poiché ognuno di questi elementi permuta con $x_3^{p^a(p-1)}$, anche il loro prodotto y permuta con $x_3^{p^a(p-1)}$.

Sia ora x un p'–elemento di G. Poiché $(o(x) , p^a) = 1$, x è potenza di x^{p^a} cioè $x = x^{p^a k}$. Allora $x^{p-1} = x^{p^a(p-1)k}$. Poiché $[y , x^{p^a(p-1)}] = 1$, si ha anche, allora $[y , x^{p-1}] = 1$; onde, valendo la (ii) per ogni p_i divisore di $|G|$ vale anche la $(+)$ e G è supersolubile.

c.v.d.

In modo del tutto analogo, basandosi ancora su teoremi dimostrati da Baer in [1] o immediatamente derivabili da essi (cfr. ad esempio [6], 3.1) si prova:

TEOREMA 2.4. *Un gruppo* G *finito è di esponente divisore di* $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$ ($p_1 > p_2 > \cdots > p_s$ numeri primi dispari) *e ha i fattori principali di ordine primo o quadrato di un primo se e solo se in esso sono leggi le parole*:

$$\text{(i)}\quad x_1^n \qquad \text{(ii)}\quad \left[[x_1 , x_2]^{np_i^{-a_i}} , x_3^{p_i^{a_i}(p_i^2-1)}\right] \qquad i = 1 , \cdots , s.$$

TEOREMA 2.5. *Un gruppo finito* G *soddisfa le seguenti tre condizioni*:

1) *l'esponente di* G *divide* $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$, *con* n *non divisibile per* 6;

2) *ogni fattore principale di* G *ha ordine primo o quadrato di un primo*;

3) G *induce in ogni suo fattore principale un gruppo ciclico di automorfismi, il cui ordine divide* $p^2 - 1$, *dove* p *è l'unico divisore primo dell'ordine del fattore principale considerato, se e solo se in esso sono leggi le parole*:

$$\text{(i)}\quad x_1^n , 6 \nmid n \qquad \text{(ii)}\quad \left[[x_1 , x_2]^{np_i^{-a_i}} , x_3^{p_i^{a_i}(p_i^2-1)}\right] \qquad i = 1 , \cdots , s.$$

Da questi è poi immediato ricavare teoremi analoghi a [4], 2.1 o [4], 2.2, risultandone comunque ancora molto semplificata l'enunciazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BAER (1969) – *Principal factors, maximal subgroups and conditional identities of finite groups*, « Ill. Jour. Math. », *13*.

[2] G. ZAPPA (1970) – *Su alcune varietà generate da gruppi supersolubili*, « Le Matematiche », *25*.

[3] G. ZAPPA (1971) – *Sulla varietà generata da certi gruppi risolubili*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *50*.

[4] G. ZAPPA (1971) – *Su certe varietà di gruppi di esponente limitato*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », *51*.

[5] G. ZAPPA (1971) – *Sulla varietà generata da certi gruppi finiti a derivato nilpotente*, « Le Matematiche », *26*.

[6] G. ZAPPA e B. PIOCHI (1974) – *Sulle leggi di alcune varietà generate da gruppi finiti risolubili*, « Le Matematiche », *29*.