Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Laura Benevento, Teresa Bruno, Laura Castellano

Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico-parabolici del quarto ordine degeneri in una o più direzioni

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.4, p. 470–472.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_4_470_0>

Analisi matematica. — *Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico-parabolici del quarto ordine degeneri in una o più direzioni.* Nota di MARIA LAURA BENEVENTO, TERESA BRUNO e LAURA CASTELLANO, presentata (*) dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — We state an existence theorem for the boundary problem in the title.

È noto il problema del tipo di Dirichlet per gli operatori *ellittico-parabolici* (1) del secondo ordine.

Tale problema, formulato da G. Fichera nel caso più generale, è stato ampiamente studiato (2), e spesso in riferimento ad operatori particolari; fra questi figurano gli *ultraparabolici* (3) o *degeneri in più direzioni*, cioè quelli per i quali il determinante della forma caratteristica ha rango minore almeno di due unità rispetto al numero delle variabili.

Per quanto concerne operatori ellittico-parabolici di ordine superiore, il problema è stato considerato recentemente da A. Canfora [1, 2], che lo ha formulato per una classe di operatori del quarto ordine a coefficienti reali. Il problema è posto in un aperto regolare e limitato $\Omega \subseteq R^k$ e si considera un operatore che è ellittico in una parte Ω_0 di Ω tale che $\bar{\Omega} - \Omega_0$ è l'unione di un numero finito di domini disgiunti $\Omega_1, \cdots, \Omega_r$ (*zone di degenerazione*), in ognuno dei quali esso si presenta nella forma:

$$T(D_x) + A(D_x, D_t) D_t \qquad x \in R^{k-1}, \quad t \in R$$

ove t è una delle variabili (non necessariamente la stessa in tutti i domini Ω_i), T è un operatore del quarto ordine ellittico positivo e infine $A(D_x, D_t)$ è un operatore:

a) ellittico positivo del secondo ordine

oppure

b) del tipo $pD_t + \sum_{|\alpha|=2} q_\alpha(x') D_x^\alpha$

con p costante negativa e $\sum_{|\alpha|=2} q_\alpha \xi^\alpha \geq 0$ (ovvero ≤ 0)

oppure

c) costante e non nullo;

(*) Nella seduta del 20 aprile 1974.

(1) Ricordiamo che l'operatore $\sum_{|\alpha|\leq 2p} a_\alpha(x') D_{x'}^\alpha$, $x' \in \Omega \subseteq R^k$, si dice ellittico-parabolico in Ω se la forma lineare caratteristica $\sum_{|\alpha|=2p} a_\alpha(x') \xi^\alpha$, $\xi \in R^k$, è semidefinita e di segno costante $\forall x' \in \Omega$.

(2) Cfr. [3], [6], [8].

(3) Cfr. [4], [5], [7].

le zone di degenerazione, o sono interne a Ω oppure hanno in comune con la frontiera Γ di Ω uno o più domini internamente connessi su iperpiani $t =$ cost.

Per il problema formulato Canfora ha stabilito un teorema di esistenza di una *soluzione generalizzata in* $L_2(\Omega)$, cioè di una funzione di $L_2(\Omega)$ che è dotata in senso generalizzato in $L_2^{\mathrm{loc}}\left(\bigcup_{i=0}^{r} \overset{0}{\Omega}_i\right)$ di tutte le derivate che figurano nell'operatore e che verifica q.o. l'equazione e le condizioni al contorno.

Noi ci siamo proposte di estendere il risultato di Canfora ad operatori che degenerano anche « in più direzioni », cominciando con il riferirci al caso *b*). Precisamente, consideriamo un operatore

$$L = \sum_{|\alpha| \leq 4} a_\alpha(x')\, D_{x'}^\alpha \qquad x' \in R^k$$

che in ciascuna delle zone di degenerazione ha la forma:

$$\sum_{|\alpha| \leq 4} a_\alpha(x')\, D_x^\alpha - \sum_{|\beta|=2} b_\beta(x')\, D_t^\beta + \sum_{\substack{h=1,\cdots,n \\ |\alpha| \leq 2}} q_\alpha^{(h)}\, D_x^\alpha\, D_{t_h}, \quad x \in R^m, \quad t \in R^n \quad (m+n=k),$$

dove

i) *gli operatori* $\sum_{|\alpha| \leq 4} a_\alpha D_x^\alpha$ *e* $\sum_{|\beta| \leq 2} b_\beta D_t^\beta$ *sono ellittici dello stesso segno,* mentre, a differenza di quanto è supposto in *b*), non si impone nessuna condizione sugli operatori $\sum_{|\alpha|=2} q_\alpha^{(h)} D_x^\alpha$. I domini Ω_i $(i \neq 0)$, come nei lavori di Canfora, o sono interni a Ω oppure hanno in comune con Γ domini su iperpiani; noi però consideriamo non solo l'eventualità che questi iperpiani siano del tipo $t_i =$ cost ma anche il caso che essi siano del tipo $x_i =$ cost. Supponiamo inoltre verificata la seguente condizione, che corrisponde alla condizione $p =$ cost in *b*):

ii) *per ogni* $h = 1, \cdots, n$, *il coefficiente* b_{hh} *di* $D_{t_h}^2$ *è costante nei domini* Ω_i $(i \neq 0)$ *tali che* $\Omega_i \cap \Gamma$ *è contenuto nell'iperpiano* $t_h =$ *cost.*

Al fine di formulare il problema da noi considerato, indichiamo con Γ_0 il sottoinsieme di Γ costituito dalla parte adiacente alla zona di ellitticità e dalla parte adiacente a zone di degenerazione e contenuta in iperpiani $x_i =$ cost.

Orbene, il problema è il seguente:

$$Lu = f \quad \text{in} \quad \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{su} \quad \Gamma\,; \qquad D_\nu u = 0 \quad \text{su} \quad \Gamma_0\,;$$

per esso *abbiamo provato l'esistenza di una soluzione generalizzata in* $L_2(\Omega)$, *qualunque sia* $f \in L_2(\Omega)$, *nell'ipotesi che i coefficienti* a_α *di* L *appartengano a* $C^{|\alpha|}(\overline{\Omega})$ *e inoltre che*

$$(u\,, Lu)_\Omega \geq K\, \| u \|_\Omega^2 \qquad \forall u \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega).$$

Questo risultato, che contiene il teorema citato di Canfora, sarà esposto dettagliatamente in un lavoro di prossima pubblicazione; la dimostrazione è conseguita in sostanza con i procedimenti adoperati da Canfora; tali procedimenti sono stati in alcuni punti modificati mediante utili accorgimenti, i quali hanno reso possibile il superamento di non poche e onerose difficoltà, dovute essenzialmente alla presenza di più variabili di degenerazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. CANFORA (1972) – *Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico parabolici del quarto ordine I*, « Ricerche di Mat. », *21*, 86–156.

[2] A. CANFORA (1973) – *Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico–parabolici del quarto ordine II*, « Ricerche di Mat. », *22*, 3–68.

[3] G. FICHERA (1959) – *On a unified theory of boundary value problems for elliptic–parabolic equations of second order*, Univ. Wisconsin Press, Madison. 97–120.

[4] T. G. GENCEV (1963) – *On ultraparabolic equations*, « Soviet Math. Dokl. », *4*, 979–982.

[5] T. G. GENCEV (1964) – *On Dirichlet's and Cauchy's problems for ultraparabolic equations*, « Ann. Univ. Sofia, Mat. », *57*, 9–39.

[6] J. KOHN e L. NIREMBERG (1967) – *Degenerate elliptic–parabolic equations of second order*, « Comm. pure and applied math. », *20*, 797–872.

[7] A.M. IL'IN (1964) – *On a class of ultraparabolic equations*, « Soviet Math. Dokl. », *5*, 1673–1676.

[8] O. A. OLEINIK (1966) – *Linear equations of second order with non negative characteristic form*, « Am. Math. Soc. Transl. », ser. 2 (65), 167–199.