Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Gabriele Korchmaros

## Osservazioni sui risultati di B. Segre relativi ai k-archi contenenti k-1 punti di un ovale

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **56** (1974), n.4, p. 541–549.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_4_541_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

**Geometrie finite.** — *Osservazioni sui risultati di B. Segre relativi ai k–archi contenenti k — 1 punti di un ovale.* Nota di GABRIELE KORCHMÁROS, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — It is given by the Introduction.

## INTRODUZIONE

Un insieme di $k$ punti di un piano proiettivo finito che non contenga nessuna terna di punti allineati chiamasi, con B. Segre, un $k$–arco. Se un $k$–arco non è contenuto in nessun $(k + 1)$–arco, lo si dice completo.

Consideriamo un'ovale $\Omega$ di un piano proiettivo finito d'ordine $q$, $q$ dispari, il che notoriamente val quanto dire che $\Omega$ è un $(q + 1)$–arco. Se O è un punto non situato su $\Omega$, per esso passano $(q + 1)/2$ o $(q - 1)/2$ secanti dell'ovale, secondoché O sia interno o esterno ad $\Omega$. Togliendo dai punti di $\Omega$ un punto per ciascuna delle secanti per O e aggregando O stesso ai punti rimanenti dell'ovale, si ottiene un $(q + 3)/2$–oppure un $(q + 5)/2$–arco, secondoché O sia interno o esterno ad $\Omega$.

La precedente semplice costruzione, data da B. Segre ([7], pp. 152) è importante per più motivi. Da una parte – tenendo conto di una sua osservazione, a norma della quale un $k$–arco di $S_{2,q}$, piano di Galois d'ordine $q = p^r$ $(p \neq 2)$, avente più di $(q + 3)/2$ punti sopra una stessa ovale, giace per intero su tale ovale – essa determina la migliore limitazione possibile; d'altra parte, essa fornisce, sotto certe condizioni, archi completi. Più precisamente, assunto $q \equiv 3 \pmod 4$, L. Lombardo–Radice ha dimostrato che in $S_{2,q}$ mediante questa costruzione si può ottenere un $(q + 5)/2$–arco completo [3]; d'altro canto, nel caso in cui $q \equiv 1 \pmod 4$, verrà dimostrato nel § III del presente lavoro che si può ancora ottenere un $(q + 3)/2$–arco completo.

La stessa costruzione fornisce risultati anche nel caso dei piani non–desarguesiani. Infatti, É. Sárkány ha determinato un $(q + 5)/2$–arco completo in un piano di Moulton d'ordine $q$, con $q \equiv 3 \pmod 4$ [6].

Nel § II, basandosi sempre sulla stessa costruzione, verrà determinata una classe di $(q + 7)/2$–archi, contenenti $(q + 3)/2$ punti di una conica di $S_{2,q}$, con $q \equiv 1 \pmod 4$.

Verrà dimostrata in un caso speciale – in cui cioè $q = 2p - 1$, con $p$ primo dispari – la completezza dei suddetti archi, anzi, in un certo senso più della completezza: se un piano di Galois di ordine $2p - 1$, $p$ primo

(*) Nella seduta del 20 aprile 1974.

dispari, ammette un $k$–arco contenente $(q+3)/2$ punti di una conica, allora $k \leq (q+7)/2$.

I. Per svolgere il presente studio è opportuno premettere alcune proposizioni, in parte note, relative alle involuzioni di una conica di un piano di Galois d'ordine dispari ed alle proprietà elementari dei $k$–archi.

Sia $\Omega$ una conica in $S_{2,q}$, piano di Galois d'ordine $q = p^r$ $(p \neq 2)$. Se L, M e P sono tre punti allineati del piano (con L, M non necessariamente distinti fra di loro), tali che L, $M \in \Omega$ e $P \notin \Omega$, per « $LP \cap \Omega$ » si intenderà – convenzionalmente – il punto M. Preso quindi un punto qualsiasi del piano, ma non giacente su $\Omega$, la corrispondenza $\varphi_P : L \to$ « $LP \cap \Omega$ » (per ogni L di $\Omega$) induce una permutazione dei punti della conica, che verrà chiamata un'*involuzione di centro* P.

È noto che per ogni retta $l$ del piano, l'ordine del gruppo $\Gamma_l$ generato dalle involuzioni di centro appartenente ad $l^* = l - \Omega$ vale $2h$, dove $h$ denota la cardinalità di $l^*$ ([5] 4.1). Ci proponiamo di dimostrare che $\Gamma_l$ risulta diedrale, purché $l$ non sia tangente ad $\Omega$. A tale scopo verranno esaminate nel n. 1 alcune proprietà riferite ai sottogruppi di $\Gamma_l$.

**1.** Siccome $\Gamma_l$ ha ordine $2h$, ne segue che i suoi elementi o sono involuzioni oppure la composizione di due di esse: $\psi_{P,Q} = \varphi_P \circ \varphi_Q$ – elementi che prenderanno il nome di corrispondenze assiali. Esse godono delle seguenti proprietà: ([5] 3.2, 3.3, 3.4):

1.0 *Per tutti* $L, M \in \Omega$ *con* $L \neq M^{\psi_{P,Q}}$ *e* $M \neq L^{\psi_{P,Q}}$ $LM^{\psi_{P,Q}} \cap L^{\psi_{P,Q}}M \in l^*$.

1.1 *Presi una corrispondenza assiale* $\psi_{P,Q}$, *e un punto* $U \in l^*$ *esiste ed è unico* $R \in l^*$ *tale che* $\psi_{P,Q} = \psi_{R,U}$,

1.2 *Per ogni* $\varphi_P$, $\psi \in \Gamma_l$, $\varphi_P \circ \psi = \psi^{-1} \circ \varphi_P$.

1.3 *Se* L, M *sono punti di* $\Omega^* = \Omega \setminus l$ *allora esiste una sola corrispondenza assiale che trasforma* L *in* M.

Da 1.1 e 1.3 segue che

1.4 *Presi un punto arbitrario* M *di* $\Omega^*$ *ed una corrispondenza assiale* $\psi_{P,Q}$ *i punti* M, $M^{\psi_{P,Q}}$ *ed il polo di l rispetto ad* $\Omega$ *giacciono su di una retta se e soltanto se* $\psi_{P,Q}$ *risulta involutoria.*

*Dimostrazione.* A prescindere dal caso banale in cui $M = M^{\psi_{P,Q}}$, e contemporaneamente $\psi_{P,Q}$ risulta l'unità di $\Gamma_l$, denoteremo con R l'intersezione di $MM^{\psi_{P,Q}}$ di $l$, poi ordinatamente con V e W le intersezioni di $l$ e delle tangenti di $\Omega$ relative ad M e $M^{\psi_{P,Q}}$. Supponiamo che $MM^{\psi_{P,Q}}$ passi per il polo di $l$, ossia che V e W coincidano. Ne seguono immediatamente le:

$$(1) \qquad M^{\psi_{P,Q}} = M^{\psi_{R,V}} \qquad\qquad (2) \qquad M^{\psi_{P,Q} \circ \psi_{R,V}} = M.$$

Pertanto, avuto riguardo alla 1.3, la (1) fornisce $\psi_{P,Q} = \psi_{R,V}$. Quest'ultima, in forza della (2), esprime che $\psi_{P,Q}$, dev'essere involutoria.

Reciprocamente si hanno le:

$$M^{\psi_{P,Q}} = M^{\psi_{R,W}} \quad , \quad M^{\psi_{R,Q} \circ \psi_{W,R}} = M.$$

Ne discende subito la

$$(3) \qquad M^{\psi_{R,W} \circ \psi_{V,R}} = M .$$

Sfruttando ancora la 1.3, la (3) implica che la composizione $\psi_{R,W} = \psi_{V,R}$ risulta l'unità di $\Gamma_l$, che si rappresenta anche nella forma $\psi_{R,W} \circ \psi_{W,R}$, sicché, in virtù della 1.1, $W = V$. Ma quest'ultima esprime che la retta $MM^{\psi_{P,Q}}$ passa per il polo di $l$ rispetto ad $\Omega$.

Si osservi che, utilizzando 1.1 e 1.3, si prova agevolmente che:

1.5. *Le corrispondenze assiali* $\psi_{P,Q}$ *formano un sottogruppo commutativo* $\Delta_l$ *d'ordine h di* $\Gamma_l$.

Da 1.2, con ulteriori analisi, si deduce che:

1.6 *Le corrispondenze assiali* $\psi_{P,Q}$ *con punti* P , Q *esterni ad* $\Omega$ *formano un sottogruppo* $\Sigma_l$ *di* $\Delta_l$.

*Dimostrazione.* È chiaro che l'inversa di una corrispondenza assiale $\psi_{P,Q}$ risulta $\psi_{Q,P}$. Dunque essa ha gli stessi centri, sicché risulta dotata di punti esterni.

Così per mostrare l'asserto, basta provare che ogni scelta di quattro (non necessariamente distinti) punti esterni ad $\Omega$ , P , Q , U , V di $l^*$ fornisce un altro punto R, il quale è – similmente – esterno alla conica e soddisfa alla seguente proprietà

$$\psi_{P,Q} \circ \psi_{U,V} = \psi_{R,V} .$$

Cominciamo coll'osservare che

1.7 *Purché* P, Q , U, *punti di* $l$, *siano esterni ad* $\Omega$, *il punto* $R \in l^*$ *soddisfacente alla relazione*

(4) $$\psi_{P,Q} = \psi_{R,U}$$

*risulta del pari esterno.*

*Dimostrazione.* Ad escludere casi evidenti, in cui cioè $P = Q$ o $Q = U$ oppure $l$ risulta tangente ad $\Omega$, per i quali le (4) manifestamente sussiste, sia L il punto di contatto di una tangente di $\Omega$ uscente da P. Allora i punti L , $M = L^{\psi_{P,Q}} = L^{\varphi_Q}$ , $N = L^{\psi_{P,Q} \circ \varphi_U} = L^{\varphi_R}$ di $\Omega$ sono distinti ed i lati LM, MN del triangolo LMN inscritto in $\Omega$ intersecano $l$ in punti esterni – Q e U –; sicché, in forza di un teorema noto ([2], teor. 1.), per il terzo lato NL sussiste la stessa affermazione: esso interseca $l$ in un punto esterno, il quale, in virtù di $LN = RN$, coincide con R.

Sfruttando la 1.7, dalla (4) discende senz'altro che

$$\psi_{P,Q} \circ \psi_{U,V} = \psi_{R,U} \circ \psi_{U,V} = \psi_{R,V} .$$

Notiamo che dalle 1.1, 1.6 e 1.7 si ricavano ordinatamente le:

1.8 $\psi_{P,Q} = \psi_{R,Q} \Longleftrightarrow P = R$,

1.9 *preso un punto* $Q \in l$ *esterno ad* $\Omega$, *ogni* $\psi \in \Sigma_l$ *può essere scritta nella forma* $\psi_{P,Q}$ *con un opportuno punto* P o Q *esterno ad* $\Omega$,

1.10 *se uno dei punti* P, Q *di* $l^*$ *risulta esterno, l'altro interno ad* $\Omega$, *allora* $\psi_{P,Q} \notin \Sigma_l$.

Dalle 1.8 e 1.9 segue senz'altro che $\Sigma_l$ contiene tanti elementi quanti sono i punti esterni ad $\Omega$ che giaciono su $l$, cioè

1.11 *L'ordine di* $\Sigma_l$ *risulta* $h$ *o* $h/2$ *secondoché* $l$ *sia tangente o no rispetto ad* $\Omega$.

Confrontando 1.5 ad 1.11 si trae che

1.12 *Se* P , Q *di* $l^*$ *sono interni ad* $\Omega$, *allora* $\psi_{P,Q} \in \Sigma_l$.

Osserviamo poi che

1.13 *Ogni* $\psi \in \Sigma_l$ *è un elemento quadrato nel gruppo* $\Delta_l$.

*Dimostrazione.* Sia $\psi$ rappresentata nella forma $\psi_{P,Q}$, dove $P , Q \in l$ sono punti esterni ad $\Omega$. Indichino $PP_1$ e $QQ_1$ $(P_1 , Q_1 \in \Omega^* = \Omega \setminus l)$ due tangenti ad $\Omega$; inoltre denoti $U = P_1 Q_1 \cap l$. Allora $P_1^{\psi_{P,Q}} = P_1^{\varphi_U} = Q_1 = Q^{\psi_Q} = P_1^{\psi_{U,V}}$, sicché in virtù della 1.3, $\psi_{P,U} = \psi_{U,Q}$. Ne segue che $\psi_{P,Q} = \psi_{P,U} = \psi_{U,Q} = \psi_{P,U} \circ \psi_{P,U}$, onde l'asserto.

Denoti $\Sigma$ l'unione dei $\Sigma_l$, al variare di $l$ sulle rette di $S_{2,q}$ .

Poiché ogni $\Sigma_l$ è contenuto nel gruppo $\Gamma$ generato dalle involuzioni del piano, $\Sigma$ risulta ovviamente un complesso contenente $\frac{1}{2}(q\,(q^2 - 1))$ elementi di esso. Vogliamo ora provare che $\Sigma$ è un gruppo il quale, in base ad alcune sue proprietà, risulta isomorfo al piccolo gruppo proiettivo PSL $(2 , q)$, sul campo GF $(q)$.

Siano L, M, L′, M′ ($L \neq M$, $L' \neq M'$) punti di $\Omega$. Indichino $u$ e $v$ le tangenti a tale conica nei punti L e M′ rispettivamente, e siano $U = MM' \cap u$ e $V = LL' \cap v$. Allora U e V sono esterni alla conica e $\psi_{U,V}$ muta L in L′ ed M in M′. Dunque $\psi$ *è 2–transitivo su* $\Omega$.

Siano $\psi_1 \in \Sigma_{l_1}$ e $\psi_2 \in \Sigma_{l_2}$ con $l_1 \neq l_2$. Purché $U = l_1 \cap l_2 \notin \Omega$, in forza delle 1.1, 1.7, 1.10, 1.12 possono venir scritte nella forma $\psi_1 = \psi_{V_1,U}$ e $\psi_2 = \psi_{V_2,U}$, dove $V_1 \in l_1$ e $V_2 \in l_2$ sono contemporaneamente esterni o interni ad $\Omega$, secondoché U è esterno o interno rispetto ad essa. Da ciò si conclude che $\psi_1 \circ \psi_2^{-1} = \psi_{V_1,U} \circ \psi_{U,V_2} = \varphi_{V_1} \circ \varphi_U \circ \varphi_U \circ \varphi_{V_2} = \psi_{V_1,V_2}$. Quindi in questo caso anche $\psi_1 \circ \psi_2^{-1} \in \Sigma$.

Se invece $U = l_1 \cap l_2 \in \Omega$, prendiamo due punti $U_1$ e $U_2$ tali che $U_1 \in l_1$ e $U_2 \in l_2$, ed inoltre $U_1 U_2$ risulti esterna ad $\Omega$. In virtù delle 1.1 e 1.7 esistono allora $V_1$ e $V_2$ per i quali $\psi_1 = \psi_{V_1,U_1}$ e $\psi_2 = \psi_{V_2,U_2}$, dove $U_i$ e $V_i$ $(i = 1, 2)$ sono punti contemporaneamente esterni o interni ad $\Omega$. Denoti $w$ una retta passante per $V_1$ ed esterna alla conica e indichi $W_1 = w \cap U_1U_2$, inoltre, $W_2$ denoti il punto di $U_1U_2$ per cui $\psi_{U_1,U_2} = \psi_{W_1,W_2}$. Allora

$$\psi_1 \circ \psi_2^{-1} = \psi_{V_1,U_1} \circ \psi_{U_2,V_2} = \varphi_{V_1} \circ \varphi_{U_1} \circ \varphi_{U_2} \circ \varphi_{V_2} = \varphi_{V_1} \circ$$

$$\circ \psi_{U_1,U_2} \circ \varphi_{V_2} = \varphi_{V_1} \circ \psi_{W_1,W_2} \circ \varphi_{V_2} = \psi_{V_1,W_1} \circ \psi_{W_2,V_2},$$

dove $V_1 W_1 \cap W_2 V_2 \notin \Omega$, pertanto anche in questo caso $\psi_1 \circ \psi_2^{-1} \in \Sigma$.

Abbiamo così provato che $\Sigma$ *è un gruppo, ossia un sottogruppo 2-transitivo su* $\Omega$ *d'ordine* $\frac{1}{2}((q^2 - 1)\,q)$ *di* $\Gamma$.

Osserviamo poi che $\Sigma$ *soltanto l'unità fissa di due punti distinti di* $\Omega$; pertanto, un ben noto teorema di Suzuki [9] garantisce l'isomorfismo fra $\Sigma$ e PSL $(2, q)$.

Poiché ogni sottogruppo commutativo d'ordine $h$ $(= (q - 1)/2$ o $(q + 1)/2)$ risulta ciclico ([1], pp. 191), resta provato il seguente asserto.

1.14 *Purché* $l$ *non sia tangente di* $\Omega$, $\Sigma_l$ *risulta ciclico.*

Avuto riguardo delle 1.13 e 1.14 si ha ovviamente che

1.15 *Purché* $l$ *non sia tangente di* $\Omega$, $\Delta_l$ *risulta ciclico.*

Per concludere, 1.1 e 1.15 forniscono l'asserto desiderato:

1.16 *Purché* $l$ *non sia tangente di* $\Omega$, $\Gamma_l$, *risulta diedrale.*

**2.** Siano $\Omega$ un'ovale e $\vartheta$ un $k$-arco di un piano proiettivo d'ordine $n$, $n$ dispari. Supponiamo che $\vartheta$ non sia contenuto in $\Omega$, e che $\vartheta$ ed $\Omega$ abbiano $s$ punti in comune. Così da un punto P di $\vartheta$ e fuori di $\Omega$ $s$ rette conducono a punti comuni. Indichi $m$ la cardinalità delle tangenti che si trovano tra essi. Sapendo che $n + 1$ rappresenta il numero dei punti dell'ovale, ne discende facilmente la seguente disuguaglianza:

$$m + 2(s - m) \leq n + 1. \tag{5}$$

Da (5) e dal fatto che in un piano d'ordine dispari $m$ può assumere soltanto due valori 0 e 2, secondoché il punto P è interno o esterno rispetto ad $\Omega$, si hanno le seguenti proposizioni [4]:

2.0 $s \leq (n + 3)/2$,

se $s = (n + 3)/2$

2.1 *risulta sempre* $m = 2$, *ossia i punti di* $\vartheta$ *non giacenti su* $\Omega$ *risultano esterni rispetto all'ovale ed i punti di contatto delle tangenti ad* $\Omega$ *per tali punti appartengono* $\Omega \cap \vartheta$,

2.2 *ogni secante di* $\Omega$, *uscente da un punto di* $\vartheta$, *fuori di* $\Omega$ *contiene (almeno) un punto dall'insieme* $\Omega \cap \vartheta$, *e quindi – tenendo conto del fatto che non v'è alcuna terna di punti allineati – esattamente uno,*

2.3 *ogni secante di* $\Omega$ *che non contenga alcun punto di* $R \cap \vartheta$ *risulta esterna ad* $\Omega$.

II. **3.** Riferiamoci ora di nuovo ad $S_{2,q}$, piano di Galois d'ordine $q$ dispari. Supponiamo che $S_{2,q}$ ammetta un $k$–arco $\vartheta$ contenente $(q+3)/2$ punti di una conica $\Omega$ ed avente (almeno) altri tre punti P, Q fuori di essa. Siano chiamati rispettivamente $P_1$, $P_2$ e $Q_1$, $Q_2$ i punti di contatto di $\Omega$ con le tangenti ad essa uscenti da P e da Q. Conservando le convenzioni del n. *1* e n. *2* dalle proposizioni già provate segue facilmente che:

3.0 *Per un punto* $L \in \Omega$ *distinto da* $P_1$ *e* $P_2$ *con cui non si abbiano* $L^{\psi_{P,Q}} = Q_1$ *o* $L^{\psi_{P,Q}} = Q_2$, $L^{\psi_{P,Q}}$ *risulta un punto di* $\Omega \cap \vartheta$ *o soltanto di* $\Omega$, *secondoché* L *appartiene ad* $\Omega \cap \vartheta$ *oppure no. Se invece sussiste uno dei casi* $L = P_1$, $L = P_2$, $L^{\psi_{P,Q}} = Q_1$, $L^{\psi_{P,Q}} = Q_2$, *il punto* $L^{\psi_{P,Q}}$ *non appartiene ad* $\Omega \cap \vartheta$.

Da 3.0 si può dedurre una regolarità che ci abilita a determinare la configurazione dei punti di $\Omega \cap \vartheta$. Infatti, partendo da un qualsiasi punto di $\Omega \cap \vartheta$ e poi applicando 3.0 si può stabilire univocamente l'appartenenza o no a $\Omega \cap \vartheta$ degli altri punti che sono contenuti nella stessa orbita di $\psi_{P,Q}$ rispetto ad $\Omega$.

Le proprietà geometrico–algebriche enunciate precedentemente suggeriscono una costruzione di un $(q+7)/2$–arco contenente esattamente $(q+3)/2$ punti di una conica, costruzione analoga a quella di B. Segre citata nell'Introduzione.

Siano riprese a tale scopo in $S_{2,q}$ una conica $\Omega$ ed una retta $l$ che, attualmente, non abbiano punti in comune. In virtù della 1.14 debbono quindi esistere due punti P, Q di $l$ esterni ad $\Omega$ tali che la corrispondenza assiale $\psi_{P,Q} = \psi$ risulti un generatore di $\Sigma_l$, d'ordine $(q+1)/2$. Da ciò discende subito che $\Sigma_l$ agisce su $\Omega$ secondo due orbite. Assunta l'ipotesi $q \equiv 1 \pmod 4$, i punti di contatto $P_1$ e $P_2$ delle tangenti uscenti da P – in forza della 1.4 – giaciano su diverse orbite ed i punti di $\Omega$ sono, attualmente, della forma $P_1^{\psi^n}$, $P_2^{\psi^n}$ (al variare di $n$ da 1 a $(q+1)/2$). Ne segue che il sottoinsieme $\vartheta^* = \{P_1^{\psi^t}, P_2^{\psi^t} \mid t = (q+3)/4, (q+3)/4+1, \cdots, (q+1)/2\}$ di $\Omega$ ha $(q+3)/2$ punti. Servendosi delle corrispondenze $\psi^t$, $\varphi_P$ e $\varphi_Q$, in forza della 1.16 si stabiliscono le seguenti proprietà elementari di $\vartheta^*$:

$$P_1^{\psi^t \circ \varphi_P} = P_1^{\varphi_P \circ \psi^{-t}} = P_1^{\psi^{-t}} = P_1^{\psi^{\{(q+1)/2\}-t}}, \tag{6}$$
$$P_2^{\psi^t \circ \varphi_P} = P_2^{\varphi_P \circ \psi^{-t}} = P_2^{\psi^{-t}} = P_2^{\psi^{\{(q+1)/2\}-t}},$$

$$P_1^{\psi^t \circ \varphi_Q} = P_1^{\varphi_P \circ \psi^{(t-1)^{-1}}} = P_1^{\psi^{(t-1)^{-1}}} = P_1^{\psi^{\{(q+3)/2\}-t}}, \tag{7}$$
$$P_2^{\psi^t \circ \varphi_Q} = P_2^{\varphi_P \circ \psi^{(t-1)^{-1}}} = P_2^{\psi^{(t-1)^{-1}}} = P_2^{\psi^{\{(q+3)/2\}-t}}.$$

Pertanto, posto nella (6) $t = (q+1)/2$ ed nella (7) $t = (q+3)/4$, si hanno le

$$P_i^{\psi^{(q+1)/2} \circ \varphi_P} = P_i^{\psi^{(q+1)/2}}, \quad P_i^{\psi^{(q+3)/4} \circ \psi_Q} = P_i^{\psi^{(q+3)/4}} \qquad \{i = 1, 2\},$$

mentre per gli altri valori di $t$ i punti di $\Omega$ $P_i^{\psi^t \circ \varphi_P}$, $P_i^{\psi^t \circ \varphi_Q}$ $(i = 1, 2)$ non appartengono a $\vartheta^*$. Da ciò segue senz'altro che due punti di $\vartheta^*$ non risultano mai allineati né con P né con Q. Ricordando il fatto che PQ ed $\Omega$, quindi PQ e $\vartheta^*$, non hanno alcun punto in comune, abbiamo dunque che:

3.1 *Aggregando* P *e* Q *a* $\vartheta^*$, *si ottiene in* $S_{2,q}$, *dove* $q = 1$ (*mod* 4), *un* $(q+7)/2$*–arco avente* $(q+3)/2$ *punti giacenti su di una conica.*

4. Verifichiamo ora una proposizione valida per ogni piano di Galois d'ordine $q = 2p - 1$, dove $p$ è un numero primo [1].

4.1 *Sia un piano di Galois d'ordine* $2p - 1$, *con* $p$ *primo dispari. Se* S *ammette un k–arco* $\vartheta$ *contenente* $(q+3)/2$ *punti di una conica* $\Omega$ *ed avente* (*almeno*) *altri due punti* P, Q *non situati su di essa, il polo di* PQ *risulta interno rispetto a quel* $(q+3)/2$*–arco che viene costituito dai punti di* $\Omega \cap \vartheta$.

*Dimostrazione.* Avuto riguardo della 2.3, $l =$ PQ risulta esterna alla conica; sicché il fatto che $p$ è un numero primo fornisce in virtù della 1.4 che i punti di $\Omega$ allineati col polo di $l$ – dunque anche $P_1$ e $P_2$ – appartengono a diverse orbite di $\Sigma_l$. Sempre a causa dell'ordine attuale di $\Sigma_l$, $\psi_{P,Q}$ ha due orbite su $\Omega$ e risulta un generatore del gruppo. Partendo da $P_1$ e $P_2$, 3.0 determina nelle due orbite la configurazione dei punti di $\Omega \cap \vartheta$. Rileviamo che da ciò segue che $P_1^{\psi^n_{P,Q}}$ e $P_2^{\psi^n_{P,Q}}$ risultano contemporaneamente punti o di $\Omega \cap \vartheta$ o soltanto di $\Omega$; inoltre, in base alla 1.4, si prova senza difficoltà che essi sono allineati col polo di $l$. Ricordando il fatto che i punti della conica sono della forma $P_1^{\psi^n_{P,Q}}$, $P_2^{\psi^n_{P,Q}}$, al variare di $n$ da 0 a $p - 1$, si conclude con l'asserto.

Dalla 4.1, ed operando con un semplice ragionamento in cui si applichino le 1.4, 1.11 e 2.2, si deduce la

4.2 *Sia* S *un piano di Galois d'ordine* $2p - 1$, *con* $p$ *primo, dispari. Se* S *ammette un k–arco contenente* $(q+3)/2$ *punti di una conica, allora* $k \leq (q+7)/2$.

*Dimostrazione.* Siano $\vartheta$ un $k$–arco ed $\Omega$ una conica di S, e supponiamo che essi abbiano $(q+3)/2$ punti in comune. Se $\vartheta$ avesse (almeno) $\{(q+7)/2\} + 1$ punti, allora $\vartheta$ ammetterebbe almeno tre punti P, Q, R esterni rispetto ad $\Omega$. Pertanto i poli di PR e QR – siano essi $P^+$ e $Q^+$ – sono distinti e la retta PQ non risulta tangente ad $\Omega$. In virtù della 4.1, la corrispondenza assiale $\psi_{P^+,Q^+} \in \Sigma_l$ $(l =$ PQ$)$ muta $\Omega \cap \vartheta$ in sé, sicché il suo ordine è un divisore di $(q+3)/2$. Nello stesso tempo, dalla 1.11 segue che quest'ordine divide $(q+1)/2$ o $(q-1)/2$, secondoché $P^+ Q^+$ risulta esterna od interna rispetto ad $\Omega$. Le due precedenti proposizioni forniscono immediatamente che $P^+ Q^+$ interseca $\Omega$ in $R_1$ e $R_2$ e $\psi_{P^+Q^+}$ è involutoria. Preso quindi un

(1) La necessità di quest'ultima condizione segue da ciò che la proposizione non si estende per esempio al caso in cui $q = 29$.

punto L di $\Omega \cap \vartheta$, distinto da $R_1$ e $R_2$, $\psi_{P,Q}$ muta L in un altro punto di $\Omega \cap \vartheta$, sicché $L, L^{\psi_{P,Q}}$ ed il polo di $P^+Q^+$ – avuto riguardo della 1.4 – giaciono su una retta. Poiché quest'ultimo polo concide con R, abbiamo trovato tre punti allineati appartenenti a $\vartheta$. Per assurdo si prova così l'asserto.

III. **5.** Proseguiamo ora lo studio del n. *1*, § I. Osserviamo che dalle 1.1, 1.3, e 1.4 si ricava in particolare che:

5.0 *A condizione che $h = 2$ (mod 4), un punto $P \in l^* = l \setminus \Omega$ risulta interno o esterno ad $\Omega$ se e soltanto se la retta congiungente P col polo di $l$ è rispettivamente secante o esterna ad $\Omega$.*

*Dimostrazione*: Poiché l'ordine di $\Delta_l$ è pari, mentre quello di $\Sigma_l$ è dispari, $\Delta_l \setminus \Sigma_l$ contiene un elemento di periodo due; essa in forza della 1.1 può venir espressa nella forma $\psi_{P,Q}$.

Supponiamo prima che P sia interno ad $\Omega$, cioè compatibilmente con la 1.12 Q sia esterno. Siano $Q_1$ e $Q_2$ e punti di contatto delle tangenti di $\Omega$ uscenti da Q. Essendo $Q_1^{\psi^2_{P,Q}} = Q_1$, $\varphi_Q$ muta $Q_1^{\varphi_P}$ in sé, sicché $Q_1^{\varphi_P} = Q_1$, oppure $Q_1^{\varphi_P} = Q_2$. Siccome QP non è tangente alla conica, ne segue $Q_1^{\varphi_P} = Q_2$. Dunque $Q_1 Q_2 \cap l = P$ e ovviamente, $Q_1 Q_2$ passa per il polo di $l$. Viceversa, sia $r$ una retta passante per il polo di $l$, tale che $r \cap l = P$ e $r \cap \Omega = \{Q_1, Q_2\}$. Se Q denota l'intersezione di $l$ e della tangente di $\Omega$ per Q allora $\psi_{P,Q}$ muta manifestamente $Q_1$ in $Q_2$, sicché in forza della 1.4 essa risulta involutoria. Tenendo conto dell'ordine attuale di $\Sigma_l$, ne segue che $\psi_{P,Q} \in \Delta_l \setminus \Sigma_l$ e ciò in forza della 1.10 fornisce che P è interno.

Dalla precedente dimostrazione segue manifestamente il verificarsi dell'asserto anche nel caso di P esterno.

In seguito supporremo $l$ non tangente ad $\Omega$. Così, avuto riguardo dalla 1.11, $\Sigma_l$, ha due orbite su $\Omega^* = \Omega \setminus l$, che verrano denotate con $\Omega_{1,l}$ e $\Omega_{2,l}$ rispettivamente. Tali orbite soddisfano alle seguenti proprietà:

5.1 *Ogni secante $r$ ($r \neq l$) ad $\Omega$ uscente da $P \in l^* = l \setminus \Omega$ contiene esattamente un punto di qualunque delle orbite $\Omega_{1,l}$ e $\Omega_{2,l}$ se e soltanto se P risulta interno ad $\Omega$.*

*Dimostrazione*. Siano $\{Q_1, Q_2\} = r \cap \Omega$. Se Q denota l'intersezione di $l$ e della tangente di $\Omega$ per $Q_1$, allora $\psi_{Q,P}$ muta manifestamente $Q_1$ in $Q_2$. Dunque $Q_1$ e $Q_2$ giacciono su diverse orbite se e soltanto se $\psi_{Q,P} \notin \Sigma_l$. Poiché Q è esterno alla conica, in virtù delle 1.12 $\psi_{Q,P} \notin \Sigma_l$ equivale col fatto che P sia interno ad essa. Confrontando le ultime due proposizioni si ottiene l'asserto.

5.2 *A condizione che $h = 2$ (mod 4), ogni secante di $\Omega$ che passa per il polo di $l$ rispetto ad essa, contiene esattamente un punto di qualunque delle orbite $\Omega_{1,l}$, $\Omega_{2,l}$.*

*Dimostrazione*. In virtù della 1.11 l'ordine attuale di $\Sigma_l$ risulta dispari, sicché in esso non esiste elemento di periodo 2. Tenendo conto della 1.4, ne discende manifestamente l'asserto.

Nel piano affine $S'_{2,q}$, ottenuto da $S_{2,q}$, privandolo della retta $l_\infty$, le 5.0, 5.1 e 5.2 si possono interpretare nella seguente maniera:

5.3 *Se* $\Omega$ *è un'ellisse o un'iperbole di* $S'_{2,q}$, *secondoché* $q = 1 \pmod 4$ *o* $q = 3 \pmod 4$, *un punto improprio* P *risulta interno o esterno ad* $\Omega$ *se e soltanto se il diametro–passante per* P *è secante o esterno ad essa. Inoltre, ogni diametro–secante di* $\Omega$ *contiene un punto sia di* $\Omega_{1,l}$, *che di* $\Omega_{2,l}$.

5.4 *Se* $\Omega$ *è un'ellisse o un'iperbole di* $S'_{2,q}$, *secondoché* $q = 1 \pmod 4$ *o* $q = 3 \pmod 4$, *si può ottenere un* $(q+3)/2$– *o* $(q+5)/2$–*arco rispettivamente, aggregando a qualunque delle due orbite di* $\Sigma_l$ *il centro della conica – nel primo caso – ed anche i punti impropri – nel secondo.*

Ci proponiamo di provare la completezza degli archi in tutti e due i casi. A tale scopo, ricordiamo un risultato recente di B. Segre che ci servirà a tale scopo.

**6.** È noto come, su di una retta proiettiva $S_{1,q}$ sopra un campo di Galois d'ordine $q$, possa definirsi la nozione di birapporto; sicché, analogamente al caso classico, può anche allora introdursi il concetto di coppie di punti che si separano e che non si separano ([8], n. 3). Presi due punti distinti di $S_{1,q}$, essi spezzano questa in due segmenti proiettivi sui quali non ci sono coppie di punti separati dai primi due ([8], n. 3). Se si passa dalla retta $S_{1,q}$ ad una retta affine $S'_{1,q}$, presi su questa due punti distinti A e B, tra i due segmenti proiettivi determinati da A, B ve n'è uno che è infinito, cioè che contiene il punto improprio di $S'_{1,q}$. Si dice che un punto P di $S_{1,q}$ – distinto da A e B – è interno o esterno al segmento affine AB a seconda ch'esso non appartenga o appartenga al suddetto segmento infinito ([8], n. 3).

Se ora ci riferiamo ad una qualunque conica irriducibile $\Omega$ di un piano proiettivo di Galois $S_{2,q}$ (con $q$ dispari), i punti di esso non situati su $\Omega$ rimangono classificati in punti esterni o interni ad $\Omega$ secondoché per essi passa o non passa qualche tangente di $\Omega$.

Nasce così per una conica irriducibile $\Omega$ di $S'_{2,q}$, piano affine corrispondente ad $S_{2,q}$, il seguente problema: presi su $\Omega$ due punti distinti $P_1$ e $P_2$, come si comportano rispetto alla conica i punti della retta $P_1 P_2$ esterni o interni a segmento affine $P_1 P_2$?

La risposta risulta assai diversa a seconda che $\Omega$ è una parabola o una conica a centro ([8] pp. 390). B. Segre ha dimostrato che, se $\Omega$ è una parabola, ogni punto esterno a $P_1 P_2$ è anche esterno ad $\Omega$ ed ogni punto interno a $P_1 P_2$ risulta interno ad $\Omega$. Se invece $\Omega$ è una conica a centro, tutti i punti esterni al segmento $P_1 P_2$ hanno uno stesso comportamento rispetto ad $\Omega$ e lo stesso può dirsi di tutti i punti interni al segmento $P_1 P_2$; ma, mentre per certe rette $P_1 P_2$ i primi risultano esterni ed i secondi interni ad $\Omega$, possono esistere altre rette per cui le due alternative si scambiano. Inoltre, i suddetti comportamenti vengono sempre conservati se la secante $P_1 P_2$ subisce un quasiasi spostamento parallelamente a se stessa.

Un punto proprio P di $S'_{2,q}$ non giacente su $\Omega$ si dice *regolare* rispetto ad $\Omega$ se ha uno stesso comportamento sia rispetto ad essa sia rispetto ad ognuna delle coppie di punti intercette da $\Omega$ sulle rette di $S'_{2,q}$ uscenti da P che segano o toccano $\Omega$. Per contrapposto, un punto proprio P di $S'_{q,2}$ non giacente su $\Omega$ prende il nome punto *pseudoregolare* rispetto ad $\Omega$, quando P sia esterno rispetto ad $\Omega$ ma interno rispetto ad ognuno dei segmenti intercetti da $\Omega$ sulle singole rette per P secanti la $\Omega$.

B. Segre ha esaminato le varie possibilità che possono presentarsi per i punti regolari o pseudoregolari rispetto ad una conica a centro di $S'_{2,q}$ ed ha provato i seguenti teoremi ([8], pp. 23, 37, 29, 49):

*Una qualsiasi ellisse, nell'ipotesi che* $q \neq 5$ *e* $q \neq 7$, *ed una qualsiasi iperbole ammette soltanto il centro quale punto regolare.*

*Un'ellisse di* $S'_{2,q}$ *ammette punti pseudoregolari rispetto ad essa se, e soltanto se,* $q = 3$ *oppure* $q = 5$. *I soli piani affini di Galois in cui un'iperbole ammette punti pseudoregolari distinti dal centro sono quelli di ordine 7, 9, 11, 13.*

In possesso dei suddetti risultati, possiamo enunciare una conseguenza della 5.1.

5.5 *Presi due punti propri* $P_1$ *e* $P_2$ *su una conica a centro* $\Omega$ *di* $S'_{2q}$, *i punti della secante* $P_1 P_2$ *hanno lo stesso comportamento sia rispetto ad* $\Omega$ *e sia rispetto al segmento* $P_1 P_2$ *se e soltanto se* $P_1, P_2 \in \Omega_{1,l_\infty}$ *oppure* $P_1, P_2 \in \Omega_{2,l_\infty}$.

Veniamo ora a provare la completezza degli archi determinati nella 5.4. La dimostrazione è la stessa in tutti e due i casi.

Denoti $\Omega_{l_\infty}$ qualunque delle due orbite $\Omega_{1,l_\infty}$ e $\Omega_{2,l_\infty}$. Consideriamo un punto R tale che le tangenti per esso tocchino $\Omega$ in $\Omega_{l_\infty}$. Siano i punti di tangenza $L_1$ e $L_2$. Allora il diametro OR risulta la polare del punto improprio della retta $L_1 L_2$, il quale in forza della 5.1 è esterno ad $\Omega$. Ne segue senz'altro che OR è secante ad $\Omega$, sicché in virtù della 5.3 tale diametro contiene un punto di $\Omega_{l_\infty}$. Dunque R non è aggregabile.

Per un altro punto U, eventualmente aggregabile all'arco occorre che la retta UM, al variare di M sui punti di $\Omega_{l_\infty}$, percorrano le secanti di $\Omega$ per U e gli estremi dei segmenti intercetti da esse giacciano su diverse orbite. Da ciò, in forza delle 5.1 e 5.3, viene stabilito che U dev'essere proprio e poi, riapplicando 1.7, che U è necessariamente pseudoregolare rispetto ad $\Omega$. Tenendo conto del teorema citato di B. Segre si ottiene così l'asserto, purché $q \neq 5, 7, 11$. I tali così, sfruttando le proprietà caratteristiche dei punti pseudoregolari ([8], nn. 19, 23, 31, 37) si può immediatamente verificare l'asserto.

## BIBLIOGRAFIA

[1] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen I*, Die Grundlehren der mat. Wiss. in Einzeldarstellungen, Band 134.

[2] G. KORCHMÁROS, *Ovali nei piani di Hall d'ordine dispari* (in corso di stampa sugli «Atti Accad. Naz. Lincei, Mem. Cl. Sc. Fis. Mat. Natur.»).

[3] L. LOMBARDO-RADICE (1956) – *Sul problema dei k-archi completi in* $S_{2,q}$, «Boll. Un. Mat. Ital.», *11*, 178.

[4] G. E. MARTIN (1967) – *On arcs in a finite projective plane*, «Canad. J. Math.», *19*, 376.

[5] G. RIGBY (1969) – *Pascals ovals in projective planes*, «Canad. J. Math.», *21*, 1462.

[6] É. SÁRKÁNY, *Una classe di* $(q+3)/2$*-archi completi di un piano non desarguesiano d'ordine* $q$, $q$ *dispari* (in corso di stampa negli «Atti Acc. Naz. Lincei, Mem. Cl. Sc. Fis. Mat. Natur.»).

[7] B. SEGRE (1967) – *Introduction to Galois geometries*, «Atti Accad. Naz. Lincei, Mem. Cl. Sc. Fis. Mat. Natur.» (5), 7, 10.

[8] B. SEGRE (1973) – *Proprietà elementari relative ai segmenti ed alle coniche sopra un campo qualsiasi ed una congettura di Seppo Ilkka per il caso dei campi di Galois*, «Annali di Mat. Pura ed Appl.», (4) *96*, 289–337.

[9] M. SUZUKI (1962) – *On characterization of linear groups*, III, «Nagoya Math. J.», *21*, 159.