Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Bernard Aupetit

Caractérisation des éléments quasi-nil-potents dans les algèbres de Banach

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.5, p. 672–674.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_5_672_0>

Analisi matematica. — *Caractérisation des éléments quasi-nilpotents dans les algèbres de Banach.* Nota di BERNARD AUPETIT, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Utilizzando il teorema di Oka–Rothstein per le funzioni sottoarmoniche e quello di Vesentini sulla sottoarmonicità del raggio spettrale nelle algebre di Banach, si dimostra un teorema di continuità del raggio spettrale. Questo viene poi applicato per dedurne una caratterizzazione degli elementi quasi-nilpotenti ed una nuova dimostrazione del teorema di Kleinecke–Slirokov, assieme ad altri risultati di tipo analogo.

On désigne par A une algèbre de Banach complexe non commutative et ρ le rayon spectral.

THÉORÈME 1. *Si* $\lambda \mapsto f(\lambda)$ *est une fonction analytique de* $\mathbf{C}$ *dans* A *et* Γ *un arc de Jordan dans* $\mathbf{C}$, *d'extrémité* o, *alors*:

$$\overline{\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \neq 0 \\ \lambda \in \Gamma}}} \rho(f(\lambda)) = \rho(f(0)) .$$

La démonstration est immédiate si on applique les deux lemmes suivants:

LEMME 1 (Vesentini). *Si* $\lambda \mapsto f(\lambda)$ *est une fonction analytique de* $\mathbf{C}$ *dans* A *alors* $\lambda \to \rho(f(\lambda))$ *est sous-harmonique.*

Pour la démonstration voir [3].

LEMME 2 (Oka–Rothstein). *Si* φ *est sous-harmonique dans un domaine* D *et si* Γ *est un arc de Jordan d'extrémité* o *dans* D *alors*:

$$\overline{\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0 \\ z \in \Gamma}}} \varphi(z) = \varphi(0) .$$

La démonstration est difficile. On pourra la trouver dans [4], 71–72.

COROLLAIRE 1. *Si a et b sont dans* A, *alors*

$$\overline{\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \neq 0 \\ \lambda \in \Gamma}}} \rho(a + \lambda b) = \rho(a) .$$

COROLLAIRE 2. *Si sur une droite réelle* $\{a + \lambda b \,\|\, \lambda \in \mathbf{R}\}$ *un élément est limite d'éléments quasi-nilpotents, il est lui-même quasi-nilpotent.*

D'après l'exemple de Kakutani ([2], 282–283) on sait qu'une limite d'éléments quasi-nilpotents n'est pas nécessairement quasi-nilpotente, mais d'après le Cor. 2 le résultat est vrai si la limite a lieu sur une droite réelle.

(*) Nella seduta del 28 maggio 1974.

Dans le cas commutatif on sait que:

$$|\rho(a) - |\lambda| \rho(b)| \leq \rho(a + \lambda b) \leq \rho(a) + |\lambda| \rho(b),$$

donc que $\rho(a) = \rho(a + \lambda b)$ si b est quasi-nilpotent. Ce résultat est faux si l'algèbre n'est pas commutative; mais nous allons donner une caractérisation voisine:

THÉORÈME 2. *Pour qu'un élément b de* A *soit quasi-nilpotent il faut et il suffit que, pour tout élément a de* A, *on ait*:

$$\lim_{\substack{\lambda \to \infty \\ \lambda \in \mathbf{R}}} \frac{1}{|\lambda|} \rho(a + \lambda b) = 0.$$

C'est immédiat d'après le Cor. 1.

Nous allons maintenant donner deux corollaires immédiats de ces théorèmes. Le premier est très connu ([1], 20).

COROLLAIRE 3 (Kleinecke-Shirokov). *Si a commute avec $[a, b] = ab - ba$ alors $[a, b]$ est quasi-nilpotent.*

Démonstration. En développant $e^{\lambda a} b e^{-\lambda a}$ on obtient:

$$e^{\lambda a} b e^{-\lambda a} = b + \lambda [a, b] + \frac{\lambda^2}{2!}[a, [a, b]] + \frac{\lambda^3}{3!}[a, [a, [a, b]]] + \cdots;$$

donc, si a commute avec $[a, b]$,

$$e^{\lambda a} b e^{-\lambda a} = b + \lambda [a, b],$$

d'où $\rho(b + \lambda [a, b]) = \rho(e^{\lambda a} b e^{-\lambda a}) = \rho(b e^{-\lambda a} e^{\lambda a}) = \rho(b)$, soit $\rho([a, b]) = 0$ d'après le Théorème 2.

Remarque. La démonstration marche de la même façon si on suppose seulement que $[a, [a, b]]$ commute avec a et b.

On dira qu'un nombre complexe α est sur la frontière extérieure du spectre de a s'il appartient à la frontière de la composante connexe non bornée du complémentaire du spectre de A. Cela équivaut à dire qu'il existe un arc de Jordan, Γ, joignant α au point à l'infini et ne rencontrant pas le spectre.

COROLLAIRE 4. *Si $[a, b]\, a = 0$ ou si $a\, [a, b] = 0$, et si 0 est sur la frontière extérieure de a, alors $[a, b]$ est quasi-nilpotent.*

Démonstration. Supposons que $[a, b]\, a = 0$, l'autre cas se faisant d'une façon analogue. Pour $|\lambda| > \|a\|$ on a:

$$(a - \lambda)\, b\, (a - \lambda)^{-1} = \left(1 - \frac{a}{\lambda}\right) b \left(1 + \frac{a}{\lambda} + \frac{a^2}{\lambda^2} + \cdots\right) = b - \frac{1}{\lambda}[a, b]$$

qui, par prolongement analytique, est aussi vrai sur la composante connexe non bornée du complémentaire du spectre de a. Ainsi:

$$\rho(b) = \rho\left(b - \frac{1}{\lambda}[a, b]\right),$$

d'où

$$|\lambda| \rho(b) = \rho(\lambda b - [a, b])$$

pour λ dans cette composante.

En faisant tendre λ vers 0 sur un arc de Jordan non contenu dans le spectre et en appliquant le Cor. 1, on obtient $\rho([a, b]) = 0$.

Le Cor. 4 s'applique en particulier si tout élément de A a son spectre discret; dans ce cas, $[a, b]\, a = 0$ implique $[a, b]$ quasi-nilpotent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. KAPLANSKY (1958) – *Functional Analysis, Some aspects of Analysis and Probability*. John Wiley and Sons Inc., New York.

[2] C. E. RICKART (1960) – *General Theory of Banach algebras*, D. Van Nostrand Co., Princeton.

[3] E. VESENTINI (1968) – *On the subharmonicity of the spectral radius*, « Bull. Un. Mat. Ital. », *1* (4), 427–429.

[4] V. S. VLADIMIROV (1966) – *Methods of the theory of functions of many complex variables*, M.I.T. Press, Cambridge.