Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Renato Grassini

Estensione del trasporto misto di Fermi ad un modello matematico generale di spazio-tempo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.5, p. 720–728.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_5_720_0>

Fisica matematica. — *Estensione del trasporto misto di Fermi ad un modello matematico generale di spazio–tempo.* Nota di RENATO GRASSINI, presentata [(*)] dal Socio C. CATTANEO.

SUMMARY. — Fermi's relativistic notion of mixed transport is extended to a mathematical space-time model with an arbitrary linear connection, and the properties of this generalized transport are examined.

1. INTRODUZIONE

Il modello matematico relativistico di spazio–tempo è costituito da una coppia (M, g) con M varietà differenziale reale 4–dimensionale e g struttura riemanniana in M di tipo iperbolico normale. Tale modello generalmente non subordina in un riferimento fisico R un trasporto parallelo dei relativi vettori di spazio e ciò lascia, nella formulazione relativa delle leggi fisiche, un ampio margine di arbitrarietà nella scelta degli operatori differenziali relativi con conseguente arbitrarietà nella definizione delle grandezze fisiche relative (cfr. C. Cattaneo [1], [2] e [3], A. L. Zelmanov [4], C. Møller [5], [6], H. Arzeliès [7]). In un precedente lavoro [8] ho peraltro mostrato che l'adozione, nella dinamica relativa di una particella, della nota regola di trascrizione comporta l'uso di uno, ed uno soltanto, dei suddetti operatori, quello rinvenuto per via geometrica da I. Cattaneo Gasparini [9] e adoperato da C. Cattaneo in [3], la cui utilizzazione inoltre conduce, come ho mostrato in [10], ad una definizione di campo gravitazionale relativo dotata di proprietà fisicamente significative.

Poichè la definizione di detto operatore risulta fondata sul *trasporto misto di Fermi* di terne spaziali, il cui significato cinematico ho indicato in [11], mi è sembrato degno di interesse fornire nel presente lavoro, generalizzando le considerazioni cinematiche esposte in [11], una estensione del trasporto misto di Fermi ad un modello matematico più generale di spazio–tempo – che comprende notoriamente una vasta classe di teorie fisiche – costituito da una coppia (M, ω) in cui ω è una qualunque connessione lineare in M. Ciò consente la costruzione di una cinematica generale i cui risultati saranno applicabili anche a modelli non relativistici di spazio–tempo, come, ad esempio, il modello (di cui mi occuperò in un prossimo lavoro) proposto da A. Trautman [12] per una formulazione assiomatica della teoria newtoniana della gravitazione.

Agli elementi fondamentali della suddetta cinematica è dedicato il n. 2 dove, introdotte le nozioni di 1–forma temporale e di sistemi inerziali propri

(*) Nella seduta del 28 maggio 1974.

in relazione ad un riferimento fisico R, questo rimane caratterizzato come un continuo alla Cosserat, costituito da ∞^3 particelle p_0 e da ∞^3 triedri, ciascuno con origine in una particella p_0. Resta da precisare un criterio di scelta per l'orientamento dei suddetti triedri lungo un generico cammino φ di M, scelta da cui dipenderà, nella cinematica relativa ad R, la descrizione dell'evoluzione lungo φ delle grandezze vettoriali di spazio.

Nel modello relativistico di spazio-tempo, come ho mostrato in [11], si presenta in proposito naturale il criterio di orientare i triedri di R lungo φ in modo che i relativi sistemi inerziali propri determinino una successione continua di trasformazioni infinitesime di Lorentz senza rotazione, criterio che è equivalente a determinare con detti triedri un trasporto misto di Fermi lungo φ. Del tutto analogamente, nel modello matematico generale (M , ω), avvalendomi specificamente della connessione lineare ω, estendo anzitutto (n. 3) la nozione di successione continua di trasformazioni infinitesime senza rotazione, pervenendo poi in base ad essa (n. 4) alla preannunciata estensione del trasporto misto di Fermi – che denomino *trasporto generalizzato di Fermi* dei triedri di R – da cui rimane univocamente determinato in R un trasporto parallelo di vettori di spazio.

Da tale trasporto deduco (n. 5), per i campi vettoriali di spazio, un operatore di derivazione covariante, di cui fornisco un'espressione, in funzione della connessione lineare ω, che, nel caso relativistico, fa ritrovare sia la *derivata relativa* di I. Cattaneo Gasparini e sia, lungo cammini del genere spazio, la *derivata covariante trasversa* di C. Cattaneo e A. L. Zelmanov.

2. RIFERIMENTI FISICI IN UN MODELLO MATEMATICO GENERALE DI SPAZIO-TEMPO

Sia (M , ω) il modello matematico di spazio-tempo definito nel n. 1 e sia R un riferimento fisico, da pensarsi come un continuo munito di orologi, definito in M da una coppia

$$R = (\gamma , \tau) \tag{2.1}$$

costituita da un campo vettoriale γ e da una 1-forma reale τ per cui valgono le seguenti proprietà *a*), *b*), *c*), *d*).

a) Il campo γ definisce, mediante la congruenza delle sue curve integrali, le traiettorie d'universo delle particelle del continuo R.

b) La 1-forma τ definisce la nozione di intervallo temporale locale, da cui, nell'ipotesi che essa sia integrabile, si deduce la nozione di tempo globale o pantopico. L'assegnazione di τ dipende in generale dal continuo di riferimento R ove si assumono effettuate le misure di intervalli di tempo, cosicchè dirò τ *1-forma temporale relativa ad* R. Ove in particolare si postuli la indipendenza delle misure di tempo dal riferimento fisico che le effettua, tutte le 1-forme temporali relative si assumeranno coincidenti con una unica 1-forma τ, che dirò 1-forma *temporale assoluta*.

In ogni caso la 1-forma temporale τ deve verificare la condizione di essere *non nulla* in ciascun punto $x \in M$; ciò infatti consente di definire in M (di cui TM e $T_x M$ denotano rispettivamente il fibrato vettoriale tangente e la relativa fibra in x) una distribuzione di sottospazi vettoriali tridimensionali

$$\Sigma : \quad x \in M \to \Sigma_x \subset T_x M$$

data dalle fibre Σ_x del fibrato vettoriale

$$\operatorname{kern} \tau = \{ \boldsymbol{u} \in TM : \tau(\boldsymbol{u}) = 0 \} .$$

Essendo kern τ il luogo dei vettori che connettono localmente eventi simultanei, dirò *spazi di simultaneità* o *piattaforme spaziali* le fibre Σ_x e *vettori di spazio* i vettori ad esse appartenenti.

c) La coppia (2.1) deve verificare la condizione $\tau(\gamma) \neq 0$, dedotta dall'assunzione generale (corrispondente al principio di causalità) che le traiettorie d'universo di particelle non risultino in alcun punto tangenti a spazi di simultaneità. Assumerò pertanto nel seguito, senza perdita di generalità,

$$\tau(\gamma) = 1 . \tag{2.2}$$

Conseguentemente la coppia (2.1) determina univocamente per ogni vettore $\boldsymbol{u} \in T_x M$ la decomposizione

$$\boldsymbol{u} = \mathscr{P}_\Sigma(\boldsymbol{u}) + \tau(\boldsymbol{u})\,\gamma \tag{2.3}$$

con

$$\mathscr{P}_\Sigma(\boldsymbol{u}) \in \Sigma_x .$$

In un generico sistema di coordinate locali di M, le componenti della *proiezione spaziale* $\mathscr{P}_\Sigma(\boldsymbol{u})$ sono espresse da [1]

$$\mathscr{P}_\Sigma(u^i) = \gamma^i_j\, u^j \tag{2.4}$$

dove le quantità

$$\gamma^i_j = \delta^i_j - \gamma^i \tau_j \tag{2.5}$$

definiscono un campo tensoriale in M, che dirò *proiettore spaziale*.

Mediante tale proiettore la velocità di una particella p in R è definita da

$$\boldsymbol{v} = \mathscr{P}_\Sigma\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right), \tag{2.6}$$

ove $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ denota un vettore infinitesimo tangente alla traiettoria d'universo di p e $\mathrm{d}t$ è l'intervallo temporale $\mathrm{d}t = \tau(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) \neq 0$.

(1) Gli indici latini variano da 0 a 3; quelli greci da 1 a 3.

d) Indicati con $\tilde{\Sigma}_x$ l'insieme dei riferimenti lineari dello spazio di simultaneità Σ_x e con φ_0 la traiettoria d'universo della generica particella $p_0 \in \mathrm{R}$, dirò *sistema inerziale proprio di* p_0 ogni riferimento lineare (x, e_i) con $x \in \varphi_0$, $e_0 = \gamma$, $(e_\alpha) \in \tilde{\Sigma}_x$. Esso è da pensarsi costituito da un triedro con origine in p_0, di cui la terna (e_α) rappresenta un'arbitraria configurazione istantanea, rispetto a cui è nulla, per la (2.6), la velocità istantanea di p_0.

Poichè stante (2.1) un riferimento fisico R è completamente rappresentato in M dall'insieme dei suoi sistemi inerziali propri, esso, come preannunciato nel n. 1, rimane caratterizzato come un continuo alla Cosserat, costituito da ∞^3 particelle p_0 e da ∞^3 triedri, ciascuno con origine in una particella p_0 e configurazione a priori arbitraria durante la storia di p_0.

Le considerazioni esposte in a), b), c), d) si adattano, in particolare, al modello relativistico (M, g) di spazio–tempo, in cui un riferimento fisico R è definito dalla coppia (2.1) intesa costituita da un campo vettoriale unitario del genere tempo

$$\gamma_i \gamma^i = -1 \tag{2.7}$$

e dalla 1–forma temporale relativa definita da

$$\tau_j = -\frac{1}{c}\gamma_j ; \tag{2.8}$$

ove si interpreti la costante c come velocità della luce nel vuoto, la (2.8) conduce alla definizione di intervallo di tempo standard, introdotta da C. Cattaneo [1] e operativamente fondata sul postulato di isotropia ottica.

Da (2.7) e (2.8) segue che gli spazi di simultaneità coincidono con i sottospazi Σ_x ortogonali al campo γ e il proiettore spaziale si ottiene da (2.5). mediante la sostituzione

$$\gamma^i \to c\gamma^i \quad , \quad \tau_j \to -\frac{1}{c}\gamma_j . \tag{2.9}$$

3. TRASFORMAZIONI INFINITESIME SENZA ROTAZIONE

Assegnato in M un generico cammino $\varphi(t)$, sia

$$(e_\alpha(t)) \in \tilde{\Sigma}_{\varphi(t)} \tag{3.1}$$

una successione continua lungo $\varphi(t)$ di triedri del riferimento fisico R definito da (2.1).

Un confronto tra i sistemi inerziali propri di due di essi infinitamente prossimi,

$$(e_i) = (e_\alpha(t), \gamma(t)) \tag{3.2}$$

ed

$$(e'_i) = (e_\alpha(t + \mathrm{d}t), \gamma(t + \mathrm{d}t)) ,$$

è reso possibile dalla connessione lineare ω del modello. Essa infatti consente di effettuare preliminarmente il trasporto parallelo di $(\boldsymbol{e}_i')$ lungo $\varphi(t)$ fino al punto di parametro t e di scrivere poi

$$\boldsymbol{e}_i'' = \boldsymbol{e}_i + \omega_i^j \boldsymbol{e}_j\,, \tag{3.3}$$

ove $(\boldsymbol{e}_i'')$ denota il risultato del suddetto trasporto parallelo e le $\omega_i^j(t)$ sono le componenti infinitesime, nella base $(\boldsymbol{e}_i)$, del differenziale assoluto di $(\boldsymbol{e}_i)$ in ω

$$\nabla \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i'' - \boldsymbol{e}_i \tag{3.4}$$

valutato lungo $\varphi(t)$.

La (3.3) definisce la generica *trasformazione infinitesima* $(\boldsymbol{e}_i) \rightarrow (\boldsymbol{e}_i')$ di sistemi inerziali propri relativi ad R e subordina nello spazio di simultaneità $(\varphi(t)\,, \Sigma_{\varphi(t)})$ una trasformazione di coordinate corrispondente ad una traslazione di assi se, e soltanto se, è verificata la condizione

$$\omega_\alpha^\beta = 0\,, \tag{3.5}$$

la quale pertanto caratterizza le *trasformazioni infinitesime senza rotazione*.

Segue che ogni terna $(\boldsymbol{e}_\alpha(t))$ verificante lungo un cammino $\varphi(t)$ di M le condizioni (3.1) e (3.5) determina in R una *successione continua di trasformazioni infinitesime senza rotazione*.

Sussiste in proposito il seguente teorema:

I) *Lungo un cammino* $\varphi(t)$ *di* M, *le terne* $(\boldsymbol{e}_\alpha(t))$ *che determinano in* R *successioni continue di trasformazioni infinitesime senza rotazione sono tutte e sole le soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} \mathscr{P}_\Sigma\left(\dfrac{\nabla e_\alpha^i}{\mathrm{d}t}\right) = 0 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tau_j e_\alpha^j) = 0\,, \end{cases} \tag{3.6}$$

equivalente al seguente altro

$$\frac{\nabla e_\alpha^i}{\mathrm{d}t} = -\gamma^i e_\alpha^j \frac{\nabla \tau_j}{\mathrm{d}t}\,, \tag{3.7}$$

verificanti condizioni iniziali del tipo

$$(\boldsymbol{e}_\alpha(t_0)) = (\overset{\circ}{\boldsymbol{e}}_\alpha) \in \widetilde{\Sigma}_{\varphi(t_0)}\,. \tag{3.8}$$

Per dimostrare il Teorema I) occorre anzitutto provare l'equivalenza dei sistemi (3.6) e (3.7). A tale scopo rileverò, ricordando le formule (2.4) e (2.5), che da $(3.6)_2$ si deduce la relazione

$$\mathscr{P}_\Sigma\left(\frac{\nabla e_\alpha^i}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\nabla e_\alpha^i}{\mathrm{d}t} + \gamma^i e_\alpha^j \frac{\nabla \tau_j}{\mathrm{d}t} \tag{3.9}$$

la quale mostra che ogni soluzione di (3.6) è altresì soluzione di (3.7). Inversamente, se $(\boldsymbol{e}_\alpha(t))$ è una soluzione di (3.7), essa soddisfa necessariamente l'equazione

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tau_j e_\alpha^j) = -\tau_j \gamma^j e_\alpha^i \frac{\nabla\tau_i}{\mathrm{d}t} + e_\alpha^j \frac{\nabla\tau_j}{\mathrm{d}t},$$

che per (2.2) coincide con la $(3.6)_2$, e quindi, per (3.9), soddisfa anche l'equazione $(3.6)_1$.

Ha interesse per il seguito osservare che dalla testè provata equivalenza di (3.6) e (3.7) segue, poichè il sistema (3.7) è in forma normale, la validità del teorema di esistenza e unicità anche per il sistema (3.6).

Si supponga ora che $(\boldsymbol{e}_\alpha(t))$ sia una terna verificante (3.1) e (3.5). La condizione (3.1), oltre a rendere immediatamente soddisfatta l'equazione $(3.6)_2$ e condizioni iniziali del tipo (3.8), implica anche la relazione

$$\mathscr{P}_\Sigma(\nabla \boldsymbol{e}_\alpha) = \omega_\alpha^\beta \boldsymbol{e}_\beta \tag{3.10}$$

che si deduce ricordando le formule (3.2), (3.3), (3.4) e l'unicità della decomposizione (2.3); essa mostra che, per la condizione (3.5), rimane verificata anche l'equazione $(3.6)_1$.

Inversamente, se $(\boldsymbol{e}_\alpha(t))$ è una soluzione di (3.6) e (3.8), dalla linearità del sistema (3.6) e dal relativo teorema di esistenza e unicità segue, stante le condizioni iniziali (3.8), la condizione (3.1). Di conseguenza sussiste, come si è mostrato poc'anzi, la relazione (3.10) che, stante $(3.6)_1$, implica la condizione (3.5).

Rimane così completamente dimostrato il Teorema I). In merito ad esso va rilevato che nel caso relativistico, in cui valgono le (2.9), le equazioni (3.7) si identificano con le equazioni del *trasporto misto di Fermi*

$$\frac{\nabla e_\alpha^i}{\mathrm{d}t} = \gamma^i e_\alpha^j \frac{\nabla\gamma_j}{\mathrm{d}t} \tag{3.11}$$

le cui soluzioni verificanti (3.8) e l'ulteriore condizione iniziale di ortonormalità $(\boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ sono appunto, come ho mostrato in [11], tutte e sole le terne $(\boldsymbol{e}_\alpha(t))$ determinanti in R una successione continua di trasformazioni infinitesime di Lorentz senza rotazione.

4. TRASPORTO GENERALIZZATO DI FERMI

Dal Teorema I) e dal teorema di esistenza e unicità relativo al sistema (3.6) o (3.7), segue che ogni condizione del tipo (3.8) individua univocamente, lungo un cammino $\varphi(t)$ passante per il punto $x_0 = \varphi(t_0)$, una terna $(\boldsymbol{e}_\alpha(t))$ determinante in R una successione continua di trasformazioni infinitesime senza rotazione e che quindi, comunque si fissi un altro punto $x_1 = \varphi(t_1)$, risulta biiettiva l'applicazione

$$\tilde{\varphi}_{x_0,x_1}:\quad (\overset{\circ}{\boldsymbol{e}}_\alpha) \in \tilde{\Sigma}_{x_0} \to (\boldsymbol{e}_\alpha(t_1)) \in \tilde{\Sigma}_{x_1}. \tag{4.1}$$

Nel caso relativistico, tale biiezione è determinata dalle equazioni (3.11) e definisce pertanto in R il trasporto misto di Fermi di $\tilde{\Sigma}_{x_0}$ in $\tilde{\Sigma}_{x_1}$ lungo $\varphi(t)$. Si è così indotti, conformemente a quanto detto nel n. 1, alla seguente definizione di *trasporto generalizzato di Fermi*:

In un riferimento fisico R, *dicesi trasporto generalizzato di Fermi, lungo un cammino* $\varphi(t)$ *passante per i punti* $x_0 = \varphi(t_0)$ *e* $x_1 = \varphi(t_1)$, *dell'insieme dei triedri spaziali* $\tilde{\Sigma}_{x_0}$ *nell'altro insieme* $\tilde{\Sigma}_{x_1}$ *la biiezione* (4.1) *determinata dalle successioni continue di trasformazioni infinitesime senza rotazione.*

Dalla definizione testè data appare che il trasporto generalizzato di Fermi è determinato, stante il Teorema I), dalle equazioni (3.6) o (3.7), che dirò pertanto *equazioni del trasporto generalizzato di Fermi.*

Considerate ora, lungo $\varphi(t)$, due generiche successioni continue di trasformazioni infinitesime senza rotazione determinate in R dalle terne $(\boldsymbol{e}_\alpha(t))$ e $(\boldsymbol{e}_{\alpha'}(t))$ (che nel seguito, per brevità, chiamerò *successioni di terne di Fermi*), si ponga $\boldsymbol{e}_{\alpha'} = A^{\beta}_{\alpha'}\,\boldsymbol{e}_\beta$. Dalla linearità del proiettore spaziale $\mathscr{P}_\Sigma$ discende la relazione

$$\mathscr{P}_\Sigma\left(\frac{\nabla \boldsymbol{e}_{\alpha'}}{dt}\right) = A^{\beta}_{\alpha'}\,\mathscr{P}_\Sigma\left(\frac{\nabla \boldsymbol{e}_\beta}{dt}\right) + \frac{dA^{\beta}_{\alpha'}}{dt}\,\boldsymbol{e}_\beta$$

che, stante il Teorema I), implica

$$\frac{dA^{\beta}_{\alpha'}}{dt} = 0$$

cioè la costanza delle componenti di $(\boldsymbol{e}_{\alpha'}(t))$ rispetto a $(\boldsymbol{e}_\alpha(t))$.

Si può pertanto enunciare che:

II) *In un riferimento fisico* R, *l'isomorfismo tra le piattaforme spaziali* Σ_{x_0} *e* Σ_{x_1} *definito, mediante una successione di terne di Fermi* $(\boldsymbol{e}_\alpha(t))$, *dalla biiezione*

$$\varphi_{x_0,x_1} : \quad u^\alpha\,\boldsymbol{e}_\alpha(t_0) \in \Sigma_{x_0} \rightarrow u^\alpha\,\boldsymbol{e}_\alpha(t_1) \in \Sigma_{x_1} \tag{4.2}$$

risulta indipendente dalla particolare successione di terne di Fermi $(\boldsymbol{e}_\alpha(t))$ *considerata.*

5. Derivazione covariante associata al trasporto generalizzato di Fermi

Procedendo come nella teoria della derivazione covariante in un fibrato vettoriale [13] e indicato con X(M) il modulo dei campi vettoriali su M, si pone la seguente definizione:

Dicesi derivazione covariante associata al trasporto generalizzato di Fermi in kern τ *l'operatore*

$$D : \quad \chi \in X(M) \rightarrow (D_\chi : \boldsymbol{u} \in \Sigma \rightarrow D_\chi\,\boldsymbol{u} \in \Sigma)$$

espresso da

$$(D_\chi\,\boldsymbol{u})_{x_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0}\left(\varphi^{-1}_{x_0,x}(\boldsymbol{u}(t)) - \boldsymbol{u}(t_0)\right) \tag{5.1}$$

dove $\varphi(t)$ *denota la curva integrale del campo* χ *passante per il punto* $x_0 \in$ M.

In proposito passeremo ora a provare che:

III) *La derivata* D_χ *associata in* kern τ *al trasporto generalizzato di Fermi è espressa da*

$$D_\chi \boldsymbol{u} = \mathscr{P}_\Sigma (\nabla_\chi \boldsymbol{u}) , \tag{5.2}$$

ove ∇_χ *denota la derivazione covariante associata alla connessione lineare* ω *del considerato modello di spazio-tempo.*

Indicate infatti con $(\boldsymbol{e}_\alpha)$ una distribuzione di terne di Fermi definite lungo le curve integrali del campo χ, verificante, stante il Teorema I), l'equazione

$$\mathscr{P}_\Sigma (\nabla_\chi \boldsymbol{e}_\alpha) = 0 , \tag{5.3}$$

e posto $\boldsymbol{u} = u^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$, da (4.2) e (5.1) segue

$$\begin{aligned} (D_\chi \boldsymbol{u})_{x_0} &= \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} (u^\alpha (t)\, \boldsymbol{e}_\alpha (t_0) - u^\alpha (t_0)\, \boldsymbol{e}_\alpha (t_0)) \\ &= \left(\lim_{t \to t_0} \frac{u^\alpha (t) - u^\alpha (t_0)}{t - t_0} \right) \boldsymbol{e}_\alpha (t_0) \\ &= (\chi\, u^\alpha)_{x_0}\, \boldsymbol{e}_\alpha (t_0) \end{aligned}$$

dove χu^α denota la derivata della funzione u^α nella direzione del campo χ. Eliminando il suffisso x_0, si può quindi scrivere

$$D_\chi \boldsymbol{u} = (\chi u^\alpha)\, \boldsymbol{e}_\alpha ,$$

donde, poichè per la (5.3) sussiste la relazione

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_\Sigma (\nabla_\chi \boldsymbol{u}) &= \mathscr{P}_\Sigma (u^\alpha \nabla_\chi \boldsymbol{e}_\alpha + (\chi u^\alpha)\, \boldsymbol{e}_\alpha) \\ &= (\chi u^\alpha)\, \boldsymbol{e}_\alpha , \end{aligned}$$

segue la (5.2) e quindi l'asserto.

Allo scopo di esplicitare la (5.2), denotiamo ora con (η_j) il campo di basi olonome associate in M ad un sistema di coordinate locali. Ove questo si scelga adattato alla congruenza di R, rimane determinato anche un campo di basi $(\tilde{\eta}_\alpha)$ sugli spazi di simultaneità, dato da

$$\tilde{\eta}_\alpha = \mathscr{P}_\Sigma (\eta_\alpha) = \gamma_\alpha^i\, \eta_i . \tag{5.4}$$

Da (5.2), ponendo $\chi = \chi^j \eta_j$, si ricava

$$\begin{aligned} (D_\chi \boldsymbol{u})^i &= \chi^j (D_{\eta_j} \boldsymbol{u})^i \\ &= \chi^j \mathscr{P}_\Sigma (\nabla_j u^i) \end{aligned}$$

ed, in particolare,

$$(D_{\eta_j} \boldsymbol{u})^i = \mathscr{P}_\Sigma (\nabla_j u^i) . \tag{5.5}$$

Se la derivazione (5.1) si effettua lungo cammini del genere spazio, cioè lungo campi vettoriali di spazio $\chi = \chi^i \eta_i = \chi^\alpha \tilde{\eta}_\alpha$, da (5.2) e (5.4) si ricava

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}_\chi \boldsymbol{u})^i &= \chi^\alpha (\mathrm{D}_{\tilde{\eta}_\alpha} \boldsymbol{u})^i \\ &= \chi^\alpha \mathscr{P}_{\Sigma\Sigma} (\nabla_\alpha u^i)\end{aligned}$$

ed, in particolare,

$$(\mathrm{D}_{\tilde{\eta}_\alpha} \boldsymbol{u})^i = \mathscr{P}_{\Sigma\Sigma} (\nabla_\alpha u^i) \,. \tag{5.6}$$

Nel caso relativistico, si riconoscono a secondo membro di (5.5) e (5.6) rispettivamente i tensori *derivata relativa* di I. Cattaneo Gasparini [9] e *derivata covariante trasversa* di C. Cattaneo [1], [2] e A. L. Zelmanov [4], che vengono così ritrovati come casi particolari della derivazione covariante (5.1).

BIBLIOGRAFIA

[1] CATTANEO C. (1958) – «Il Nuovo Cimento», *10*, 318.
[2] CATTANEO C. (1959) – «Ann. di Mat.», *48*, 361.
[3] CATTANEO C. (1963) – «Comptes Rendus Ac. Sc.», *256*, 3974.
[4] ZELMANOV A. L. (1956) – «Dokl. Akad. Nauk SSSR», *107*, 815.
[5] MØLLER C. (1962) – *The theory of Relativity*, Clarendon Press, Oxford, 290.
[6] MØLLER C. (1972) – *The theory of Relativity*, Clarendon Press, Oxford, 379.
[7] ARZELIÈS H. (1961) – *Rélativité Generalisée Gravitation*, Gauthier-Villars, Paris, 220.
[8] GRASSINI R. (1973) – «Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat.», *40*, 152.
[9] CATTANEO GASPARINI I. (1963) – «Comptes Rendus Ac. Sc.», *256*, 2089.
[10] GRASSINI R. (1974) – «Ric. di Mat.» (in corso di stampa).
[11] GRASSINI R. (1971) – «Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat.», *38*, 188.
[12] TRAUTMAN A. (1963) – «Comptes Rendus Ac. Sc.», *257*, 617.
[13] KOBAYASHI S. e NOMIZU K. (1963) – *Foundation of differential geometry*, vol. I, Interscience publishers, 113.