Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria L. Benevento, Teresa Bruno, Laura Castellano

Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico-parabolici del quarto ordine degeneri in una o più direzioni. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **57** (1974), n.1-2, p. 36–39.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_1-2_36_0>

Analisi matematica. — *Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico-parabolici del quarto ordine degeneri in una o più direzioni.* Nota II [(*)] di MARIA L. BENEVENTO, TERESA BRUNO e LAURA CASTELLANO, presentata dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — An existence theorem is given for the boundary problem in the title, which extends the theorem of Note I.

Recentemente, [4] [(1)], abbiamo generalizzato un teorema di esistenza stabilito da A. Canfora in [6]; ora completiamo nel medesimo ordine di idee la generalizzazione dei risultati contenuti in [6] ed in una Memoria precedente dello stesso Autore [5].

Consideriamo operatori ellittico-parabolici

$$L = \sum_{|\alpha|\leq 4} a_\alpha(x')\, D^\alpha$$

in un aperto regolare limitato $\Omega \subset R^s$ con coefficienti reali $a_\alpha \in C^{|\alpha|}(\overline{\Omega})$ e con la condizione:

$$\text{I)} \qquad (u\,,\,Lu)_\Omega \geq c\,\|\,u\,\|_\Omega^2$$

per le funzioni reali $u \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$;

inoltre, detto $\Omega_0 \subset \Omega$ l'aperto in cui L è ellittico, il dominio $D = \overline{\Omega} - \Omega_0$ (*dominio di degenerazione*) è l'unione dei domini disgiunti $\Omega_1, \cdots, \Omega_r$ (*zone di degenerazione*) nel generico dei quali, Ω_k, L coincide con uno dei tre seguenti operatori:

$$\text{A)} \qquad \sum_{|\alpha|\leq 4} a_\alpha D_x^\alpha - \sum_{i,j=0}^{n_k} b_{ij}\, D_{t_i} D_{t_j} - q D_{t_0}^3 + \sum_{|\alpha|=1} q_\alpha D_{t_0}^2 D_x^\alpha + \sum_{\substack{i=0\\|\alpha|\leq 2}}^{n_k} c_\alpha^{(i)} D_x^\alpha D_{t_i} \qquad (x\,;t_0\,,\cdots,t_{n_k}) \in R^s$$

$$\text{B)} \qquad \sum_{|\alpha|\leq 4} a_\alpha D_x^\alpha - \sum_{i,j=1}^{n_k} b_{ij}\, D_{t_i} D_{t_j} + \sum_{\substack{i=1\\|\alpha|\leq 2}}^{n_k} c_\alpha^{(i)} D_x^\alpha D_{t_i} \qquad (x\,;t_1\,,\cdots,t_{n_k}) \in R^s$$

$$\text{C)} \qquad \sum_{|\alpha|\leq 4} a_\alpha D_x^\alpha - \sum_{i,j=1}^{n_k} b_{ij}\, D_{t_i} D_{t_j} + \sum_{\substack{i=1\\|\alpha|\leq 2}}^{n_k} c_\alpha^{(i)} D_x^\alpha D_{t_i} + a D_{t_0} \qquad (x\,;t_0\,,\cdots,t_{n_k}) \in R^s,$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1974.

(1) Nella Nota [4] abbiamo semplicemente enunciato il risultato ottenuto; esso è stato esposto, anche se non in tutti i dettagli, nella relazione n. 40 dell'Istituto di Matematica dell'Università di Napoli, dal titolo: *Sul problema al contorno del tipo di Dirichlet per una classe di operatori ellittico-parabolici del IV ordine degeneri in una o più direzioni I.*

I risultati che illustriamo nella presente Nota sono stati già esposti in due relazioni similari che portano lo stesso titolo della precedente (II e III, nn. 45 e 46); comunque ci ripromettiamo di dare un'esposizione completa ed unitaria dei risultati in discorso in una Memoria di prossima pubblicazione.

dove $x = (x_1, \cdots, x_{m_k})$ e $t_0, t_1, \cdots, t_{n_k}$ possono avere diverso significato a seconda della zona Ω_k, ma si ha sempre:

$$m_k + n_k = s \quad \text{in B)}, \qquad m_k + n_k + 1 = s \quad \text{in A) e C)}.$$

Supponiamo verificate le condizioni:

$$\text{II})_1 \qquad \sum_{|\alpha|=4} a_\alpha \xi^\alpha + \sum_{i,j=1}^{n_k} b_{ij} \tau_i \tau_j \geq \mu \left(|\xi|^4 + \sum_{i=1}^{n_k} \tau_i^2 \right), \qquad \xi, \tau \in R^s$$

uniformemente in Ω_k;

$q \neq 0$ e $a \neq 0$, anzi per semplicità, poiché ciò non è restrittivo, $q > 0$ e $a > 0$,

le quali assicurano che gli operatori A), B) e C) sono quasi ellittici.

Si osservi che il fatto che in A) e in C) figura una sola variabile con il ruolo di t_0 è *condizione necessaria* per la quasi ellitticità (cfr. [3], n. 2); lo stesso dicasi per l'ipotesi di ellitticità sui polinomi:

$$\sum_{|\alpha|=4} a_\alpha \xi^\alpha \quad \text{e} \quad \sum_{i,j=1}^{n_k} b_{ij} \tau_i \tau_j,$$

i quali peraltro, a motivo della I), debbono risultare ellittici positivi.

Il caso $n_k = 0$ in A) e in C) e $n_k = 1$ in B) è quello considerato da Canfora; per l'osservazione di sopra, l'estensione del teorema di Canfora riguarda la più ampia classe di operatori L, con più variabili t_i (*variabili di degenerazione*), quasi ellittici in ogni Ω_k.

Si può includere, con ovvio significato, l'eventualità $m_k = 0$; in questo caso non esistono variabili con il ruolo delle x_i e quindi L ha in Ω_k ordine inferiore a quattro.

Come in [4] si suppone che Ω_k se non è interno a Ω ha in comune con la frontiera $\dot{\Omega}$ di Ω uno o più domini internamente connessi contenuti in iperpiani del tipo $x_i = \text{cost}$ oppure $t_i = \text{cost}$.

Converrà per il seguito denotare con Ω_A, Ω_B, Ω_C l'unione dei domini Ω_k nei quali L è rispettivamente del tipo A), B), C).

Orbene sia $\Gamma_0 = \dot{\Omega}_0 \cap \dot{\Omega}$ e per ogni k, $\Gamma_1^{(k)}$, sia la parte di $\dot{\Omega} \cap \dot{\Omega}_k$ contenuta in iperpiani di equazione $x_i = \text{cost}$ e $\Gamma_2^{(k)}$ sia la parte di $\dot{\Omega} \cap \dot{\Omega}_k$ contenuta in iperpiani $t_i = \text{cost}$ $(i \neq 0)$; inoltre se $\Omega_k \subseteq \Omega_A [\Omega_k \subseteq \Omega_C]$ $\Gamma_3^{(k)}$ e $\Gamma_3^{(k)*}$ $[\Gamma_4^{(k)}$ e $\Gamma_4^{(k)*}]$ siano le parti di $\dot{\Omega} \cap \dot{\Omega}_k$ contenute in iperpiani $t_0 = c_k = \text{cost}$ rispetto ai quali Ω si trova in $t_0 \geq c_k$ e in $t_0 \leq c_k$.

Infine poniamo:

$$\Gamma_1 = \bigcup_k \Gamma_1^{(k)} \qquad \Gamma_2 = \bigcup_k \Gamma_2^{(k)}$$

$$\Gamma_3 = \bigcup_k \Gamma_3^{(k)} \qquad \Gamma_3^* = \bigcup_k \Gamma_3^{(k)*}$$

$$\Gamma_4 = \bigcup_k \Gamma_4^{(k)} \qquad \Gamma_4^* = \bigcup_k \Gamma_4^{(k)*}$$

$$\Sigma = \bigcup_k \dot{\Omega}_k - \dot{\Omega}.$$

Supporremo verificate anche le seguenti condizioni:

II)$_2$ $\quad q =$ cost *intorno a* Γ_3;

$a \in C^3(\Omega_C)$, $a =$ cost *intorno a* Γ_4;

$\forall i \neq 0$ $b_{ii} =$ cost *intorno ai domini di* $\Gamma_2^{(k)}$ *normali a* t_i.

Tutto ciò premesso, formuliamo il problema al contorno che abbiamo considerato:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{L}u = f \qquad \text{in } \Omega \\ &u\big|_{\dot\Omega - \Gamma_4^*} = 0 \qquad \mathrm{D}_\nu u\big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_3} = 0 \end{aligned}$$

nonché il suo aggiunto:

$$\text{(I)}^* \qquad \begin{aligned} &\mathrm{L}^* v = g \qquad \text{in } \Omega \\ &v\big|_{\dot\Omega - \Gamma_4} = 0 \qquad \mathrm{D}_\nu v\big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_3^*} = 0, \end{aligned}$$

f e g essendo funzioni assegnate in $L_2(\Omega)$.

Si indichi ora con $\mathcal{G}$ la classe delle funzioni $v \in H^4(\Omega)$ tali che esista un compatto $K_v \subset \mathring{\Gamma}_4$ per cui si abbia:

$$v\big|_{\dot\Omega - K_v} = 0$$

e inoltre tali che esista un compatto $K'_v \subset \mathring{\Gamma}_2 \cup \mathring{\Gamma}_3 \cup \mathring{\Gamma}_4 \cup \mathring{\Gamma}_4^*$ per cui si abbia:

$$\mathrm{D}_\nu v\big|_{\dot\Omega - K'_v} = 0;$$

si intenderà per *soluzione debole* del problema (I) una funzione $u \in L_2(\Omega)$ tale che:

$$(u\,,\mathrm{L}^* v)_\Omega = (f\,,v)_\Omega \qquad \forall v \in \mathcal{G}.$$

Allo scopo di enunciare il teorema di esistenza che abbiamo stabilito, è opportuno introdurre la classe $\mathcal{K}$ delle funzioni $u \in L_2(\Omega) \cap H^4(\Omega_0)$ tali che detto K un compatto contenuto in $\overline{\Omega} - \overline{\Sigma}$, u ha in $L_2(K)$ le seguenti derivate:

k_1) se $K \subset (\mathring{\Omega} - \Sigma) \cup \mathring{\Gamma}_4$, tutte le derivate che figurano in L;

k_2) se $K \subset \mathring{\Omega}_A \cup \mathring{\Omega}_B \cup \mathring{\Gamma}_1$, le derivate prime e seconde; se invece $K \subset \mathring{\Omega}_C \cup \mathring{\Gamma}_1$, quelle del tipo D_x^α con $|\alpha| \leq 2$ e $D_{t_i}^k$ con $k = 1\,,2$ e $i \neq 0$;

k_3) se $K \subset \mathring{\Omega}_A \cup \mathring{\Omega}_B \cup \mathring{\Gamma}_2$, le derivate prime e inoltre quelle del tipo D_x^α con $|\alpha| \leq 4$; se invece $K \subset \mathring{\Omega}_C \cup \mathring{\Gamma}_2$, quelle del tipo D_x^α con $|\alpha| \leq 2$ e D_{t_i} con $i \neq 0$;

k_4) se $K \subset \mathring{\Omega}_A \cup \mathring{\Gamma}_3$, quelle del tipo D_x^α con $|\alpha| \leq 3$ e D_t^β con $|\beta| \leq 2$; se invece $K \subset \mathring{\Omega}_A \cup \mathring{\Gamma}_3^*$, quelle del tipo D_x^α con $|\alpha| \leq 2$ e D_t^β con $|\beta| = 1$.

Orbene, si dirà soluzione *quasi regolare* del problema (I) una funzione $u \in \mathscr{K}$ che verifica q.o. l'equazione e le condizioni al contorno.

Il nostro teorema di esistenza per il problema (I) è il seguente:

TEOREMA. *Se sono verificate le condizioni* I), $\mathrm{II})_1$, $\mathrm{II})_2$, *il problema* (I) *ha almeno una soluzione debole, la quale risulta anche una soluzione quasi regolare.*

Naturalmente sussiste il teorema corrispondente per il problema $(\mathrm{I})^*$; esso si enuncia sostituendo le classi $\mathscr{G}$ e $\mathscr{K}$ con le analoghe $\mathscr{G}^*$ e $\mathscr{K}^*$ ottenute da esse scambiando Γ_i con Γ_i^* $(i = 3, 4)$.

Il teorema enunciato contiene il risultato di [4] $(\Omega_A = \Omega_C = \varnothing)$ e, come si è detto, il teorema generale di Canfora, che si riferisce al caso in cui in ogni Ω_k figura una sola variabile di degenerazione.

Il nostro risultato è più generale di quello di Canfora non solo per la presenza di più variabili di degenerazione: infatti, si considera l'eventualità che $\dot{\Omega} \cap \dot{\Omega}_k$ contenga parti di iperpiani $x_i = \text{cost}$ e non solo $t_i = \text{cost}$; nel caso A) si evita l'ipotesi di ellitticità dell'operatore

$$-qD_{t_0}^2 + \sum_{|\alpha|=2} q_\alpha D_{t_0} D_x^\alpha + \sum_{|\alpha|=2} c_\alpha^{(0)} D_x^\alpha$$

conservando comunque l'ipotesi $q \neq 0$ come è necessario per la quasi ellitticità; nel caso B), come è detto in [4], non viene fatta l'ipotesi che l'operatore $\sum_{|\alpha|=2} c_\alpha^{(i)} D_x^\alpha$ sia ellittico-parabolico; infine si ottengono alcuni miglioramenti per quanto concerne la regolarità dei coefficienti.

I procedimenti che abbiamo usato si rifanno a quelli adoperati da Canfora ed a quelli utilizzati nel lavoro precedente; essi sono basati sostanzialmente su quelli descritti e adoperati da Agmon in [1] e [2].

Le molte e laboriose modifiche apportate a tali procedimenti sono state rese necessarie dalla maggiore complessità dell'operatore, non solo in riferimento alla presenza di più variabili di degenerazione ma anche per quanto concerne le ipotesi più generali in cui ci siamo poste.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. AGMON – *The L^p approach to the Dirichlet problem*, « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa » (III), *13*, 405–448.

[2] S. AGMON (1965) – *Lectures on elliptic boundary value problems*, D. Van Nostrand Co., Inc. Princeton.

[3] G.C. BAROZZI (1964) – *Sul multi-indice degli operatori quasi ellittici*, « Boll. U.M.I. », *19*, 289–299.

[4] M. L. BENEVENTO, T. BRUNO e L. CASTELLANO (1974) – *Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico-parabolici del quarto ordine degeneri in una o più direzioni*, I, « Acc. Naz. Lincei », *56*, 470–472.

[5] A. CANFORA (1972) – *Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico-parabolici del quarto ordine*, I, « Ricerche di Mat. », *21*, 86–156.

[6] A. CANFORA (1973) – *Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico-parabolici del quarto ordine*, II, « Ricerche di Mat. », *22*, 3–68.