Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Macit Büke

Sui q-archi di un piano di Galois d'ordine q

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **57** (1974), n.5, p. 355–359.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_5_355_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Geometrie finite. — *Sui q-archi di un piano di Galois d'ordine q.* Nota di MACIT BÜKE, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — A complement to a result by B. Segre [1, 2, 3] is given.

1. B. Segre ha dimostrato (1) tra altri risultati, che *ogni q-arco piano è contenuto in una conica, necessariamente unica, se q è dispari e maggiore di* 3, dove in generale, egli chiama k-arco un insieme di k punti a tre a tre non allineati di un piano lineare costruito su un corpo di Galois di ordine q (potenza di un numero primo diverso da 2).

Per pervenire a tale risultato, l'Autore dimostra anzitutto l'esistenza di almeno un punto B del piano, tale che per esso passino almeno cinque tangenti di un q-arco K. Siano P_1, P_2, P_3, U e Q i cinque punti di contatto di queste tangenti. Se si scelgono $P_1(1, 0, 0)$, $P_2(0, 1, 0)$, $P_3(0, 0, 1)$ come punti fondamentali ed U (1, 1, 1) come punto unità, i punti B, Q ed un punto P qualsiasi appartenente al q-arco K avranno per rispettive coordinate: $B(b_1, b_2, b_3)$, $Q(q_1^{-1}, q_2^{-1}, q_3^{-1})$ e $P(p_1^{-1}, p_2^{-1}, p_3^{-1})$, le quantità b_i, q_i e p_i essendo tutte non nulle e le b_i, q_i così come le p_i essendo a due a due distinte. Si giunge allora all'equazione (2)

$$(\alpha) \qquad (a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3)\,[b_1 p_1^2 (p_3 - p_2) + b_2 p_2^2 (p_1 - p_3) + b_3 p_3^2 (p_2 - p_1)] = 0,$$

dove i coefficienti a_i verificano la relazione $a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

Il prof. Segre dimostra allora che in quest'equazione il secondo fattore non può essere nullo e che quindi rimane quale unica possibilità che sia

$$(\beta) \qquad a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = 0;$$

condizione che esprime appunto che ogni punto $P(p_1^{-1}, p_2^{-1}, p_3^{-1})$ del q-arco K giace su di una conica.

Nell'asserire che il secondo fattore

$$(\gamma) \qquad b_1 p_1^2 (p_3 - p_2) + b_2 p_2^2 (p_1 - p_3) + b_3 p_3^2 (p_2 - p_1)$$

non è nullo, l'Autore si fonda su di una proprietà proiettiva (3) di carattere elementare. Nel dimostrare tale proprietà, un piccolo errore di calcolo sopravvenuto nelle formule di trasformazione influisce sulla conclusione finale, per

(*) Nella seduta del 14 novembre 1974.

(1) Cfr. B. SEGRE [1], n. 15, p. 373.

(2) Cfr. B. SEGRE [1], n. 14, p. 372.

(3) Cfr. B. SEGRE [1], n. 7, pp. 364-365.

cui il lemma e quindi la dimostrazione del teorema sui q-archi contiene una lieve lacuna.

Sebbene il prof. Segre abbia stabilito con altri più profondi metodi in lavori successivi (4),(5) proprietà dei k–archi piani includenti fra l'altro la proprietà dei q–archi menzionata sopra, con l'esclusione però dei valori di q intermedi fra 3 e 13, Egli ha nondimeno suggerito, ritenendola opportuna, l'esposizione delle seguenti osservazioni che stabiliscono il risultato anche per tali valori.

2. Iniziamo col dimostrare la seguente proprietà proiettiva che sostituisce il risultato ottenuto in [1] (n. 7, pp. 364–365);

Condizione necessaria e sufficiente affinchè i sei punti P_1, P_2, P_3, U, Q *e* P *a tre a tre non allineati di un piano proiettivo sopra un qualunque corpo commutativo (finito od infinito) di caratteristica* $\neq 2$, *giacciano sopra una medesima conica, è che, se nelle due omografie definite mediante le quaterne corrispondenti*

$$(1) \qquad P_1 \rightarrow P_1 \quad , \quad P_2 \rightarrow P_2 \quad , \quad P_3 \rightarrow P_3 \quad , \quad U \rightarrow P$$

e

$$(2) \qquad P_1 \rightarrow P_1 \quad , \quad P_2 \rightarrow P_2 \quad , \quad P_3 \rightarrow P_3 \quad , \quad Q \rightarrow P$$

gli omologhi del punto P *sono rispettivamente* P′ *e* P″ *le trasformate* PP′, PP″ *delle due corde* UP *e* QP *coincidano. In questo caso, la retta* PP′ (≡ PP″) *è la tangente alla conica nel punto* P.

La condizione è necessaria. Supponiamo infatti che i sei punti appartengano ad una medesima conica. Scelto un sistema di coordinate in modo che $P_1(1, 0, 0)$, $P_2(0, 1, 0)$ e $P_3(0, 0, 1)$ ne siano i punti fondamentali ed U (1, 1, 1) sia il punto unità, i punti Q e P avranno per coordinate rispettivamente $Q(q_1^{-1}, q_2^{-1}, q_3^{-1})$ e $P(p_1^{-1}, p_2^{-1}, p_3^{-1})$, le quantità q_i e p_i essendo tutte non nulle e le q_i così come p_i essendo fra loro differenti a due a due. L'equazione della conica si scrive allora nella forma

$$(3) \qquad a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 = 0 ,$$

dove i coefficienti a_i verificano le seguenti condizioni:

$$(4) \qquad \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 0, \\ a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3 &= 0, \\ a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 &= 0. \end{aligned}$$

(4) Cfr. B. SEGRE [2], n. 14, p. 46.
(5) Cfr. B. SEGRE [3], n. 19, p. 163.

Le quantità q_i e p_i soddisfano quindi all'equazione

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Le equazioni delle omografie (1) e (2) essendo rispettivamente

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & p_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & p_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{1_1}$$

e

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 p_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & q_2 p_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & q_3 p_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \tag{2_1}$$

gli omologhi P′ e P″ del punto P hanno per coordinate

$$\mathrm{P}'\,(p_1^{-2}, p_2^{-2}, p_3^{-2}) \quad \text{e} \quad \mathrm{P}''\,(q_1 p_1^{-2}, q_2 p_2^{-2}, q_3 p_3^{-2}). \tag{6}$$

Si consideri ora il determinante

$$\mathrm{D} \equiv \begin{vmatrix} p_1^{-1} & p_2^{-1} & p_3^{-1} \\ p_1^{-2} & p_2^{-2} & p_3^{-2} \\ q_1 p_1^{-2} & q_2 p_2^{-2} & q_3 p_3^{-2} \end{vmatrix}; \tag{7}$$

questo ovviamente si riscrive nella maniera seguente

$$\mathrm{D} \equiv (p_1 p_2 p_3)^{-2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = (p_1 p_2 p_3)^{-2} \Delta, \tag{8}$$

e quindi risulta nullo per via della condizione (5). Ne segue che le trasformate PP′ e PP″ coincidono.

D'altra parte, le coordinate della tangente alla conica di equazione (3) nel punto P sono

$$a_3 p_2^{-1} + a_2 p_3^{-1} \ : \ a_3 p_1^{-1} + a_1 p_3^{-1} \ : \ a_2 p_1^{-1} + a_1 p_2^{-1}; \tag{9}$$

e tenendo conto della prima e della terza delle equazioni (4) i coefficienti a_i avendo i rapporti

$$a_1 : a_2 : a_3 = p_3 - p_2 : p_1 - p_3 : p_2 - p_1,$$

le coordinate della tangente (9) si riscrivono nella forma

$$(9_1) \qquad p_1^2(p_2-p_3) \;:\; p_2^2(p_3-p_1) \;:\; p_3^2(p_1-p_2).$$

Ma appunto tali coordinate sono quelle della retta PP′ ($\equiv$ PP″).

La condizione è sufficiente. Si suppongono le rette PP′ e PP″ coincidenti. In tal caso deve essere nullo il determinante (7): $D = 0$, il che, per via della (8), si riduce alla condizione $\Delta = 0$, cioè alla

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante a primo membro, si ottiene l'equazione

$$(10) \qquad (q_2-q_3)\,p_1 + (q_3-q_1)\,p_2 + (q_1-q_2)\,p_3 = 0.$$

Ma questa esprime per l'appunto che il punto P di coordinate $(p_1^{-1}, p_2^{-1}, p_3^{-1})$ appartiene alla conica S di equazione

$$(11) \qquad S \equiv (q_2-q_3)\,x_2 x_3 + (q_3-q_1)\,x_3 x_1 + (q_1-q_2)\,x_1 x_2 = 0,$$

che d'altronde passa per i punti $P_1(1,0,0)$, $P_2(0,1,0)$, $P_3(0,0,1)$, $U(1,1,1)$ e $Q(q_1^{-1}, q_2^{-1}, q_3^{-1})$.

3. Si consideri ora la settupla di punti presa in esame al n. 1, colle medesime notazioni.

La conica S, definita dai cinque punti di contatto P_1, P_2, P_3, U e Q, ha per equazione (11). Se P è un punto qualsiasi del q-arco K, tale che sia $P \in S$, l'equazione (11) esprime che la condizione (β) del n. 1 è soddisfatta.

D'altra parte l'espressione del fattore (γ) del n. 1, si può riscrivere nella forma

$$b_1 p_1^2(p_3-p_2) + b_2 p_2^2(p_1-p_3) + b_3 p_3^2(p_2-p_1)$$

$$(12) \qquad \equiv -(p_1 p_2 p_3)^2 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ p_1^{-1} & p_2^{-1} & p_3^{-1} \\ p_1^{-2} & p_2^{-2} & p_3^{-2} \end{vmatrix}.$$

Se dunque questo fattore è nullo, i punti $B(b_1, b_2, b_3)$, $P(p_1^{-1}, p_2^{-1}, p_3^{-1})$ e $P'(p_1^{-2}, p_2^{-2}, p_3^{-2})$ (dove P′ è l'omologo del punto P nella omografia (1) definita al n. 2) sono collineari.

Dimostreremo ora che ogni punto $P(p_1^{-1}, p_2^{-1}, p_3^{-1})$ del q-arco K sta necessariamente sulla conica S avente l'equazione (11). Infatti sia P un punto qualsiasi del q-arco K, differente dai punti P_1, P_2, P_3, U e Q. Supponiamo $P \notin S$, sicchè, in virtù delle relazioni (α) e (12), si ha che il punto B giace sulla retta PP′.

D'altra parte, nel sistema di coordinate ottenuto conservando i punti fondamentali P_1, P_2 e P_3, ma sostituendo il punto unità con il punto Q, l'equazione della conica non cambia, allorchè l'espressione del fattore (γ) si trasforma nella

$$(13) \qquad -\frac{(p_1 p_2 p_3)^2}{q_1 q_2 q_3} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ p_1^{-1} & p_2^{-1} & p_3^{-1} \\ q_1 p_1^{-2} & q_2 p_2^{-2} & q_3 p_3^{-2} \end{vmatrix}.$$

Ora, essendo per ipotesi $P \notin S$, il determinante che compare in (13) deve essere nullo, cioè il punto B (b_1, b_2, b_3) giace sulla retta PP″ (dove P″ è l'omologo del punto P nella omografia (2) definita al n. 2). Dunque le due rette PP′ e PP″ devono essere coincidenti. Ma tale risultato è in contraddizione con quanto affermato in precedenza perchè, il punto P non giacendo sulla conica S, in virtù della proprietà del n. 2 le rette PP′ e PP″ sono distinte.

Inoltre, la conica S contiene il punto B (b_1, b_2, b_3) poichè, in caso contrario, sarebbe impossibile il passaggio di almeno cinque tangenti del q–arco K per il punto B. Dunque l'equazione della conica S si può scrivere nella forma

$$(14) \qquad S \equiv b_1(b_2 - b_3)\, x_2 x_3 + b_2(b_3 - b_1)\, x_3 x_1 + b_3(b_1 - b_2)\, x_1 x_2 = 0.$$

Ne segue che *ogni punto del q–arco* K *è sulla conica* S, come appunto dovevasi dimostrare.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. SEGRE (1955) – *Curve razionali normali e k–archi negli spazi finiti*, «Ann. di Mat.» (4), *39*, 357–379.
[2] B. SEGRE (1959) – *Le geometrie di Galois*, «Ann. di Mat.» (4), *48*, 1–96.
[3] B. SEGRE (1967) – *Introduction to Galois geometries*, «Mem. Acc. Naz. dei Lincei» (8), *8*, 133–236.