Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Lucia Manna Ciarrapico

Elementi curvilinei tangenti nell'ordinario spazio proiettivo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **57** (1974), n.6, p. 576–582.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_6_576_0>

Geometria differenziale. — *Elementi curvilinei tangenti nell'ordinario spazio proiettivo.* Nota di LUCIA MANNA CIARRAPICO, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

SUMMARY. — The projective invariants of two flex tangent differential elements (in the 3-dimensional projective space) are determined up to the individualization of an intrinsically reference system.

1. In una Nota lincea del 1935 [1], E. Bompiani ha preso in esame due elementi differenziali curvilinei nel piano e nello spazio, ed in particolare ha considerato due elementi del terzo ordine (nello spazio) con lo stesso centro, la stessa tangente (non di flesso), piani osculatori (a contatto del 2° ordine) distinti ed ha dimostrato l'esistenza di un invariante finito. Successivamente A. Terracini [2], [3] ha dato di tale invariante un interessante significato geometrico. Egli proietta i due elementi del 3° ordine da due centri distinti G, G′ su un piano α passante per la tangente comune t dei due elementi. Le due proiezioni coincidono se nella stella di centro O si determina una corrispondenza (in cui si corrispondono OG, OG′) generalmente quadratica *dipendente dal piano* α, corrispondenza che si riduce ad una omografia *per un solo piano* α^*. Il birapporto di α^*, del piano principale relativo ai due E^3 e dei loro piani osculatori è l'invariante determinato da E. Bompiani.

Ancora in una Nota lincea [4] del 1968 E. Bompiani dà un procedimento nuovo per trovare detto invariante; inoltre prosegue la ricerca per elementi d'ordine più elevato, sia nel caso che i due elementi abbiano piani osculatori distinti, sia nel caso che li abbiano coincidenti, fino alla determinazione di un riferimento proiettivo intrinseco.

In questa Nota mi propongo di esaminare la stessa questione nel caso che la tangente comune sia *di flesso*.

2. Consideriamo dapprima due elementi curvilinei differenziali con lo stesso centro O, aventi ivi la *stessa* tangente, di flesso per ambedue (a contatto del 2° ordine), ma piano iperosculatore (a contatto del 3° ordine e non superiore) *diverso*.

In un sistema di coordinate proiettive non omogenee x, y, z, che abbia come origine O, per asse x la tangente comune $t(y = z = 0)$, come piano $xy(z = 0)$ il piano iperosculatore al primo elemento, i due elementi E^6 ed $\bar{E}^6$ (ai quali senz'altro ci riferiamo poiché con elementi d'ordine inferiore non

(*) Nella seduta del 14 dicembre 1974.

si arriva a determinare un riferimento) si possono rappresentare con le equazioni:

$$(2.1)\qquad \mathrm{E}^6\begin{cases} y = ax^3 + cx^4 + ex^5 + gx^6 + [>6] \\ z = \qquad\quad dx^4 + fx^5 + hx^6 + [>6] \end{cases}$$

$$\overline{\mathrm{E}}^6\begin{cases} y = \qquad\quad \bar{c}x^4 + \bar{e}x^5 + \bar{g}x^6 + [>6]\,{}^{(1)} \\ z = \bar{b}x^3 + \bar{d}x^4 + \bar{f}x^5 + \bar{h}x^6 + [>6] \end{cases}$$

con

$$a \neq 0 \quad , \quad d \neq 0 \quad , \quad \bar{c} \neq 0 \quad , \quad \bar{b} \neq 0$$

per le ipotesi fatte.

Le trasformazioni di coordinate che lasciano invariati gli elementi finora fissati (il centro O, la tangente, i due piani iperosculatori) del riferimento sono del tipo:

$$(2.2)\qquad x = \frac{\alpha x' + \beta y' + \gamma z'}{1 - (\lambda x' + \mu y' + \nu z')} \quad , \quad y = \frac{py'}{1 - (\lambda x' + \mu y' + \nu z')} \, ,$$

$$z = \frac{qz'}{1 - (\lambda x' + \mu y' + \nu z')}$$

con $\alpha \neq 0$, $p \neq 0$, $q \neq 0$ affinché il determinante della trasformazione sia diverso da zero.

I coefficienti della nuova rappresentazione saranno indicati con le stesse lettere dotate di apici.

Consideriamo i due elementi fermandoci per ora ai termini del 4° ordine. Si hanno per i coefficienti le seguenti relazioni:

$$(2.3)\qquad a'p = a\alpha^3 \quad , \quad \bar{b}'q = \bar{b}\alpha^3$$

$$(2.4)\qquad d'q = d\alpha^4 \quad , \quad \bar{c}'p = \bar{c}\alpha^4$$

$$(2.5)\qquad c'p = c\alpha^4 + 3\,\alpha^3\,\lambda a - p\lambda a' \quad ; \quad \bar{d}'q = \bar{d}\alpha^4 + 3\,\alpha^3\,\lambda\bar{b} - q\lambda\bar{b}\,.$$

Poiché $a \neq 0$, $\bar{b} \neq 0$, si può sempre scegliere il riferimento iniziale in modo che siano $a = \bar{b} = 1$; dalle (2.3) discende che questi valori rimangono invariati per le trasformazioni per cui $p = q = \alpha^3$.

Con tali semplificazioni le relazioni (2.4) e (2.5) divengono (poiché è $\alpha \neq 0$):

$$d' = d\alpha \quad , \quad \bar{c}' = \bar{c}\alpha$$

$$c' = c\alpha + 2\lambda \quad , \quad \bar{d}' = \bar{d}\alpha + 2\lambda.$$

Scelto a questo punto di riferimento iniziale in modo che siano $d = 1$ (essendo $d \neq 0$), $c = 0$, affinché questi valori si conservino, le trasformazioni devono avere $\lambda = 0$, $\alpha = 1$. Di conseguenza risultano $\bar{c}$ (2), $\bar{d}$ *invarianti e* $p = q = 1$.

(1) La notazione $[> s]$ indica termini arbitrari di ordine $> s$ in x.
(2) $\bar{c}$ è l'analogo dell'invariante n determinato da E. Bompiani [1], [4].

3. Esaminiamo ora come agisce la trasformazione con le precisazioni suddette sui due E^6:

$$E^6 \begin{cases} y = x^3 + ex^5 + gx^6 + [> 6] \\ z = x^4 + fx^5 + hx^6 + [> 6] \end{cases}$$

$$\bar{E}^6 \begin{cases} y = \bar{c}x^4 + \bar{e}x^5 + \bar{g}x^6 [> 6] \\ z = x^3 + \bar{d}x^4 + \bar{f}x^5 + \bar{h}x^6 + [> 6] \end{cases}$$

con le trasformazioni:

$$x = \frac{x' + \beta y' + \gamma z'}{1 - (\mu y' + \nu z')} \quad , \quad y = \frac{y'}{1 - (\mu y' + \nu z')} \quad , \quad z = \frac{z'}{1 - (\mu y' + \nu z')} \, .$$

Si hanno tra i coefficienti le relazioni:

$$(3.1) \qquad e' = e + 3\beta \quad , \quad f' = f \quad , \quad \bar{e}' = \bar{e} \quad , \quad \bar{f}' = \bar{f} + 3\gamma$$

$$(3.2) \qquad \begin{aligned} & g' = g + 3\gamma + 2\mu \quad , \quad h' = h + 3\beta \quad , \quad \bar{g}' = \bar{g} + 3\gamma\bar{c} \, , \\ & \bar{h}' = \bar{h} + 3\beta\bar{c} + 3\gamma\bar{d} + 2\nu \, . \end{aligned}$$

Osserviamo che f, $\bar{e}$ sono altri *due invarianti*. Scelto poi il riferimento in modo che sia $e = \bar{f} = 0$, tali valori si conservano per le trasformazioni per cui $\beta = \gamma = 0$. Di conseguenza le relazioni (3.2) si semplificano in $g' = g + 2\mu$, $\bar{h}' = \bar{h} + 2\nu$, mentre h, $\bar{g}$ *sono invarianti*; si può fare $g' = \bar{h}' = 0$ e se già $g = \bar{h} = 0$, questi valori si conservano quando $\mu = \nu = 0$.

Si ha pertanto la forma canonica:

$$E^6 \begin{cases} y = x^3 + [> 6] \\ z = x^4 + fx^5 + hx^6 + [> 6] \end{cases}$$

$$\bar{E}^6 \begin{cases} y = \bar{c}x^4 + \bar{e}x^5 + \bar{g}x^6 + [> 6] \\ z = x^3 + \bar{d}x^4 + [> 6] \end{cases}$$

che individua il riferimento; i coefficienti letterali f, h, $\bar{c}$, $\bar{e}$, $\bar{g}$, $\bar{d}$, *nonché tutti i rimanenti sono invarianti proiettivi della coppia di elementi.*

Si conclude quindi con il teorema:

La configurazione di due elementi curvilinei del 6° ordine nell'ordinario spazio proiettivo aventi in un punto la stessa tangente di flesso (a contatto del 2° ordine) e ivi piani iperosculatori (a contatto del 3° ordine) diversi determinano in modo unico un tetraedro ed un punto unità (quindi non appartenente a facce del tetraedro) e 6 invarianti proiettivi.

4. Studiamo ora il comportamento del tutto diverso di due elementi aventi la *stessa* tangente di flesso (a contatto del 2° ordine), come nel caso precedente, e però anche *lo stesso* piano iperosculatore (a contatto da 3° ordine); esaminiamo questo caso sotto le ulteriori ipotesi che i due elementi non abbiano lo stesso E^3 e gli E^4 non appartengano ad una medesima quadrica. È necessario

proseguire la ricerca fino agli elementi del 7^0 ordine e non si giunge, come nel caso precedente, a determinare *in modo unico* un riferimento proiettivo intrinseco.

Se $y = z = 0$ sono le equazioni della tangente comune e $z = 0$ quella del piano iperosculatore comune, i due elementi E^7 ed $\bar{E}^7$ si possono rappresentare con le equazioni:

$$
(4.1)\qquad
\begin{aligned}
&E^7\begin{cases} y = ax^3 + cx^4 + ex^5 + gx^6 + ix^7 + [>7] \\ z = \qquad\quad dx^4 + fx^5 + hx^6 + lx^7 + [>7] \end{cases}\\
&\bar{E}^7\begin{cases} y = \bar{a}x^3 + \bar{c}x^4 + \bar{e}x^5 + \bar{g}x^6 + \bar{i}x^7 + [>7] \\ z = \qquad\quad \bar{d}x^4 + \bar{f}x^5 + \bar{h}x^6 + \bar{l}x^7 + [>7] \end{cases}
\end{aligned}
$$

con

$$a \neq 0 \quad , \quad b \neq 0 \quad , \quad \bar{a} \neq 0 \quad , \quad \bar{d} \neq 0 \quad , \quad a \neq \bar{a} \quad , \quad \frac{a}{d} \neq \frac{\bar{a}}{\bar{d}} .$$

Queste ultime due condizioni seguono rispettivamente dalle due ulteriori ipotesi poste ai due elementi.

Le trasformazioni di coordinate che lasciano invariati gli elementi finora fissati (il centro O, la tangente, ed il piano iperosculatore) del riferimento sono:

$$
(4.2)\qquad
\begin{aligned}
&x = \frac{\alpha x' + \beta y' + \gamma z'}{1 - (\lambda x' + \mu y' + \nu z')} \quad , \quad y = \frac{py' + qz'}{1 - (\lambda x' + \mu y' + \nu x')} \ ,\\
&z = \frac{rz'}{1 - (\lambda x' + \mu y' + \nu z')}
\end{aligned}
$$

con $\alpha \neq 0$, $p \neq 0$, $r \neq 0$ affinché il determinante della trasformazione sia diverso da zero. I coefficienti della nuova rappresentazione saranno al solito indicati con le stesse lettere dotate di apici.

Consideriamo i due elementi fermandoci ai termini del 5^0 ordine: si hanno tra i coefficienti le relazioni:

$$
(4.3)\qquad
\begin{aligned}
&pa' = \alpha^3 a \quad , \quad rd' = \alpha^4 d \quad , \quad pc' = \alpha^4 c + 3\lambda\alpha^3 a - qd' - \lambda pa'\\
&rf' = \alpha^5 f + 3\alpha^4 \lambda d - r\lambda d'\\
&pe' = \alpha^5 e + 3\alpha^2 \beta a a' + 3\alpha^2 \lambda^2 a + 3\alpha^4 \lambda c - qf' - \lambda pc' - \lambda qd' - p\lambda^2 a' .
\end{aligned}
$$

Poiché $a \neq 0$, $d \neq 0$, si può sempre scegliere il riferimento iniziale in modo che siano $a = d = 1$, $c = e = f = 0$; tali valori si conservano per le trasformazioni per cui:

$$(4.4)\qquad p = \alpha^3 \quad , \quad r = \alpha^4 \quad , \quad q = 0 \quad , \quad \lambda = 0 \quad , \quad \beta = 0.$$

Esaminiamo ora come la trasformazione con le semplificazioni (4.4) agisce sull'$\bar{E}^5$. Si trova che $\bar{a}$, $\bar{d}$, $\bar{f}$, *sono invarianti* (dove $\bar{a}$ è l'analogo dell'invariante di Mehmke-C. Segre) ed inoltre le relazioni:

$$(4.5)\qquad \bar{c}' = \alpha\bar{c} \quad , \quad \bar{e}' = \alpha^2 \bar{e} \quad , \quad \bar{f}' = \alpha\bar{f}.$$

Se almeno uno dei tre coefficienti $\bar{c}$, $\bar{e}$, $\bar{f}$ è diverso da zero, ad esempio $\bar{c}$, scelto il riferimento iniziale in modo che sia $\bar{c} = 1$, tale valore si conserva per le trasformazioni per cui $\alpha = 1$. Di conseguenza si hanno due invarianti $\bar{e}$, $\bar{f}$. Se invece $\bar{c} = \bar{e} = \bar{f} = 0$ risulterà: $\bar{c}' = \bar{e}' = \bar{f}' = 0$ qualunque sia α. Siamo quindi condotti a considerare due casi (fermandoci per ora ai termini del 6° ordine):

I caso:

$$\text{(4.6)} \qquad E^6 \begin{cases} y = x^3 + gx^6 + [> 6] \\ z = x^4 + hx^6 + [> 6] \end{cases} \qquad \bar{E}^6 \begin{cases} y = \bar{a}x^3 + x^4 + \bar{e}x^5 + \bar{g}x^6 + [> 6] \\ z = \bar{d}x^4 + \bar{f}x^5 + \bar{h}x^6 + [> 6] \end{cases}$$

essendo

$$\bar{a} \neq 0 \quad , \quad \bar{d} \neq 0 \quad , \quad \bar{a} \neq 1 \quad , \quad \bar{a} \neq \bar{d},$$

con le trasformazioni

$$\text{(4.7)} \qquad x = \frac{x' + \gamma z'}{1 - (\mu y' + \nu z')} \quad , \quad y = \frac{y'}{1 - (\mu y' + \nu z')} \quad , \quad z = \frac{z'}{1 - (\mu y' + \nu z')} \, .$$

II caso:

$$\text{(4.8)} \qquad E^6 \begin{cases} y = x^3 + gx^6 + [> 6] \\ z = x^4 + hx^6 + [> 6] \end{cases} \qquad \bar{E}^6 \begin{cases} y = \bar{a}x^3 + \bar{g}x^6 + [> 6] \\ z = \bar{d}x^4 + \bar{h}x^6 + [> 6] \end{cases}$$

essendo

$$\bar{a} \neq 0 \quad , \quad \bar{d} \neq 0 \quad , \quad \bar{a} \neq 1 \quad , \quad \bar{a} \neq \bar{d} \, ,$$

con le trasformazioni

$$\text{(4.9)} \qquad x = \frac{\alpha x' + \gamma z'}{1 - (\mu y' + \nu z')} \quad , \quad y = \frac{\alpha^3 y'}{1 - (\mu y' + \nu z')} \quad , \quad z = \frac{\alpha^4 z'}{1 - (\mu y' + \nu z')}$$

con $\alpha \neq 0$.

5. Esaminiamo il primo caso. Si hanno fra i coefficienti dei due E^6 le seguenti relazioni:

$$\text{(5.1)} \qquad \begin{aligned} g' &= g + 3\gamma + 2\mu \\ \bar{g}' &= \bar{g} + \bar{a}(3\gamma\bar{d} + 2\mu\bar{a}) \end{aligned}$$

mentre h, $\bar{h}$ *sono altri due invarianti.*

Le (5.1) mostrano che si può fare $g' = \bar{g}' = 0$ e se già $g = \bar{g} = 0$ questi valori si conservano se

$$3\gamma + 2\mu = 0$$

$$3\gamma\bar{d} + 2\mu\bar{a} = 0$$

essendo $\bar{a} \neq 0$, cioè:

$$3\gamma = -2\mu$$

$$\mu(\bar{a} - \bar{d}) = 0.$$

Poiché $\bar{a} \neq \bar{d}$ segue che $\mu = \gamma = 0$.

Passando agli E^7 si ha tra i coefficienti i ed i' dei termini del 7° ordine del primo elemento (4.1) la relazione $i = i' + 2\nu$. Si può porre $i = 0$ per $\nu = 0$; *sicché si ha la forma canonica*:

$$E^7 \begin{cases} y = x^3 + [> 7] \\ z = x^4 + hx^6 + lx^7 + [> 7] \end{cases}$$

$$\bar{E}^7 \begin{cases} y = \bar{a}x^3 + x^4 + \bar{e}x^5 + \bar{i}x^7 + [> 7] \\ z = \bar{d}x^4 + \bar{f}x^5 + \bar{h}x^6 + \bar{l}x^7 + [> 7] \end{cases}$$

che individua il riferimento, ove i coefficienti letterali $h, l, \bar{a}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}, \bar{h}, \bar{i}, \bar{l}$, *nonché tutti i rimanenti sono invarianti proiettivi della coppia di elementi.*

6. Passiamo ora al II caso considerando gli E^6 della (4.8) con le traformazioni (4.9). Si hanno tra i coefficienti dei due E^6 le relazioni:

$$\alpha g' = \alpha^4 g + 2\alpha\mu + 3\gamma \quad , \quad \alpha\bar{g}' = \alpha^4\bar{g} + \bar{a}(2\alpha\mu\bar{a} + 3\gamma\bar{d}) \tag{6.1}$$

$$h' = \alpha^2 h \quad , \quad \bar{h}' = \alpha^2\bar{h}. \tag{6.2}$$

Si può sempre porre nelle (6.1) $g' = \bar{g}' = 0$ e se già $g = \bar{g} = 0$ tali valori si conservano per:

$$2\alpha\mu = 3\gamma = 0$$

$$2\alpha\mu\bar{a} + 3\gamma\bar{d} = 0$$

essendo $\bar{a} \neq 0$, cioè

$$3\gamma = -2\alpha\mu$$

$$\alpha\mu(\bar{a} - \bar{d}) = 0.$$

Poiché $\alpha \neq 0$, $\bar{a} \neq \bar{d}$ tale sistema è soddisfatto da $\mu = \gamma = 0$. Dalle (6.2) segue inoltre che se uno dei coefficienti $h, \bar{h}$ è diverso da zero, ad esempio h, si può sempre scegliere α in modo che sia $h' = 1$ e se già $h = 1$, questo valore si conserva se $\alpha = 1$; si ha un *ulteriore invariante* $\bar{h}$. Se invece $h = \bar{h} = 0$, è anche $h' = \bar{h}' = 0$ qualunque sia α.

Siamo quindi condotti a considerare due sottocasi. Nel primo sottocaso ($h = 1$, $\bar{h}$ invariante, $\alpha = 1$) si può determinare ν in modo che sia $i' = 0$ e se già $i = 0$ questo valore si conserva per $\nu = 0$.

Sicché si ha la forma canonica:

$$E^7 \begin{cases} y = x^3 + [> 7] \\ z = x^4 + x^6 + lx^7 + [> 7] \end{cases}$$

$$\overline{E}^7 \begin{cases} y = \bar{a}x^3 + \bar{\imath}x^7 + [> 7] \\ z = \bar{d}x^4 + \bar{h}x^6 + \bar{l}x^7 + [> 7] \end{cases}$$

che individua il riferimento.

Nel secondo sottocaso consideriamo gli E^7:

$$E^7 \begin{cases} y = x^3 + ix^7 + [> 7] \\ z = x^4 + lx^7 + [> 7] \end{cases}$$

$$\overline{E}^7 \begin{cases} y = \bar{a}x^3 + \bar{\imath}x^7 + [> 7] \\ z = \bar{d}x^4 + \bar{l}x^7 + [> 7] \end{cases}$$

con le trasformazioni

$$x = \frac{\alpha x'}{1 - \nu z'} \quad , \quad y = \frac{\alpha^3 y'}{1 - \nu z'} \quad , \quad z = \frac{\alpha^4 z'}{1 - \nu z'} .$$

Si ha tra i coefficienti i , i' la relazione $i' = \alpha^4 i + 2\nu$; si può fare $i = 0$ per $\nu = 0$. Inoltre fra i rimanenti coefficienti si hanno le relazioni $l' = \alpha^3 l$, $\bar{\imath}' = \alpha^4 \bar{\imath}$, $\bar{l}' = \alpha^3 \bar{l}$.

Se uno dei tre coefficienti $l , \bar{\imath} , \bar{l}$ è diverso da zero, ad esempio l, si può fare $l = 1$ per $\alpha = 1$, mentre $\bar{\imath} , \bar{l}$ *risultano invarianti.*

Si ha l'ulteriore forma canonica:

$$E^7 \begin{cases} y = x^3 + [> 7] \\ z = x^4 + lx^7 + [> 7] \end{cases}$$

$$\overline{E}^7 \begin{cases} y = \bar{a}x^3 + \bar{\imath}x^7 + [> 7] \\ z = \bar{d}x^4 + \bar{l}x^7 + [> 7]. \end{cases}$$

Se invece $l , \bar{\imath} , \bar{l} = 0$, risulterà $l' = \bar{\imath}' = \bar{l}' = 0$ nel qual caso α rimane ancora indeterminato.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BOMPIANI (1935) – *Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei*, «Rend. dell'Acc. Naz. dei Lincei», ser. VI, *22*, 483–491.

[2] A. TERRACINI (1954–1955) – *Enti geometrici collegati con coppie di elementi curvilinei spaziali*, «Rend. di Matematica e delle sua Applicazioni, Roma», ser. V, *14*, 439–454.

[3] A. TERRACINI (1955) – *Osservazioni sulle coppie di elementi curvilinei spaziali*, Rivista della «Union Matematica Argentina», *17*, Buenos Aires 1955, 293–297 oppure «Selecta», *48*, tomo II, 651–654, Edizioni Cremonese, Roma 1968.

[4] E. BOMPIANI (1968) – *Invarianti proiettivi di elementi differenziali tangenti*, «Rend. dell'Acc. Naz. dei Lincei», ser. VIII, *44* (3), 343–348.