
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ANDREA DEL CENTINA, PAOLO ZAPPA

Alcune rappresentazioni del semipiano di Siegel

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 58 (1975), n.2, p. 77–81.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_2_77_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'8 febbraio 1975

Presiede il Presidente della Classe BENIAMINO SEGRE

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Alcune rappresentazioni del semipiano di Siegel.*

Nota di ANDREA DEL CENTINA e PAOLO ZAPPA, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — We consider the representation of a Siegel half-plane associated with the polarized torus of dim $2m$ obtained by the periods of the holomorphic $2m$ -forms. In particular, for $m = 1$ we obtain the geometric significance of the isomorphism between a Siegel half-plane of dimension three and the domain of type IV of the same dimension.

1. Sia V una varietà riemanniana, compatta, orientabile di dimensione multipla di $4 : 4m$.

Il cup-prodotto fra classi di coomologia reale di grado $2m$ definisce una forma bilineare non degenera su $H^{2m}(V, \mathbf{R})$, spazio di coomologia reale di dimensione $2m$ di V .

Per esplicitare tale forma bilineare (o la forma quadratica Q ad essa associata), consideriamo una base $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ di $H_{2m}(V, \mathbf{Z})$ mod torsione (omologia intera modulo torsione) e una base $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ dello spazio $H_{2m}(V)$ delle $2m$ -forme armoniche, fra loro ortonormali:

$$\int_{\sigma_j} \gamma_i = \delta_{ij}.$$

Se γ è una qualunque $2m$ -forma chiusa, essa si scrive:

$$\gamma = \sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma_i + d\hbar$$

(*) Nella seduta dell'8 febbraio 1975.

dove h è una $(2m+1)$ -forma su V ; allora la forma quadratica

$$Q(\gamma) = \gamma \cup \gamma[V]$$

si scrive

$$Q(\gamma) = \sum_{i,j=1}^k c_{ij} \lambda_i \lambda_j,$$

con

$$c_{ij} = \int_V \gamma_i \wedge \gamma_j.$$

La matrice $C = (c_{ij})$ è una matrice quadrata di ordine k , reale, simmetrica, non singolare.

2. Sia V kähleriana e sia Ω la 2-forma fondamentale di una metrica kähleriana. Supponiamo che su V esista una $2m$ -forma olomorfa, φ , ovunque diversa da zero; φ è unica, a meno di una costante moltiplicativa.

La $2m$ -forma φ , essendo olomorfa, è armonica e quindi combinazione lineare delle γ_i ($i = 1, \dots, k$): $\varphi = \sum_{i=1}^k \pi_i \gamma_i$, ove $\pi_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, \dots, k$) sono i periodi di φ sui cicli $\sigma_1, \dots, \sigma_k$.

Per ragioni di bigrado, è $\varphi \wedge \varphi = 0$ e, per l'ipotesi fatta su φ , $\varphi \wedge \bar{\varphi} > 0$.

Posto $\pi = {}^t(\pi_1, \dots, \pi_k)$, valgono dunque tra i periodi di φ le seguenti relazioni

$$(1) \quad \begin{cases} {}^t\pi C \pi = 0 \\ {}^t\pi C \bar{\pi} > 0. \end{cases}$$

Sia ψ una qualunque $2m$ -forma non primitiva, cioè sia $\psi = \psi_1 \wedge \Omega^{(i)}$ dove ψ_1 è una forma di grado $2m-2i$ e $\Omega^{(i)}$ denota l' i -esima potenza esterna di Ω per qualche $i \in \mathbb{Z}^+$; allora è chiaro che $\varphi \wedge \psi = 0$.

L'applicazione $L: H^{2m-2}(V) \rightarrow H^{2m}(V)$ tale che $H^{2m-2} \ni \alpha \mapsto \alpha \wedge \Omega$ è un'immersione: dunque la dimensione dello spazio delle $2m$ -forme non primitive, e quindi il numero delle relazioni lineari indipendenti sui periodi $\pi_1, \dots, \pi_k$ di φ espresse dalla condizione $\varphi \wedge \psi = 0$, è pari alla dimensione di $H^{2m-2}(V)$.

3. Sia T un toro algebrico con polarizzazione principale e $\dim_{\mathbb{C}} T = 2m$. Le ipotesi fatte su V nei nn. precedenti sono soddisfatte da T .

I periodi $\pi_1, \dots, \pi_k$ di φ non sono tutti nulli, e quindi si possono interpretare come coordinate in $\mathbb{CP}^{k-1}$ (spazio proiettivo complesso di dimensione $k-1$). D'altra parte si ha:

$$\dim H^{2m}(T) - \dim H^{2m-2}(T) = \binom{4m}{2m} - \binom{4m}{2m-2} = \frac{1}{m+1} \binom{4m+1}{2m};$$

inoltre, le (1) insieme a tutte le relazioni lineari indipendenti di cui si è detto al n. precedente definiscono un aperto $\mathfrak{A}$ di una quadrica $\mathfrak{Q}$ in uno spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^{N-1}$, $N = \frac{1}{m+1} \binom{4m+1}{2m}$.

Sia $\omega_1, \dots, \omega_{2m}$ una base per lo spazio delle 1-forme olomorfe su T , e sia $\eta_1, \dots, \eta_{4m}$ una base per la parte libera di $H_1(T, \mathbf{Z})$. Poniamo:

$$\omega = \begin{pmatrix} \int_{\eta_1} \omega_1 & \dots & \int_{\eta_{4m}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\eta_1} \omega_{2m} & \dots & \int_{\eta_{4m}} \omega_{2m} \end{pmatrix}.$$

Per le ipotesi relative a T la matrice di Riemann ω soddisfa le condizioni

$$(2') \quad \omega K^t \omega = 0,$$

$$(2'') \quad i\omega K^t \bar{\omega} > 0,$$

dove K è la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -E_{2m} \\ E_{2m} & 0 \end{pmatrix}$ ed E_{2m} denota la matrice unità di ordine $2m$.

Ciò implica che, a meno di un opportuno cambiamento della base $\omega_1, \dots, \omega_{2m}$, la matrice ω sia equivalente alla matrice (E_{2m}, Z) , dove $Z \in \mathcal{S}_{(2m)} = \{Z_{2m \times 2m} \mid {}^tZ = Z, \operatorname{Im} Z > 0\}$, $\mathcal{S}_{(2m)}$ essendo così il « semipiano » di Siegel.

La $(2')$ e la $(2'')$ sono equivalenti rispettivamente alle

$$\int_T \omega_i \wedge \omega_j \wedge \Omega^{(2m-1)} = 0,$$

$$i \int_T \omega_i \wedge \bar{\omega}_i \wedge \Omega^{(2m-1)} > 0.$$

Denotando con $Gr(2m, 4m)$ la Grassmanniana dei sottospazi di dimensione $2m$ di $\mathbf{C}^{4m}$, consideriamo la rappresentazione usuale di $Gr(2m, 4m)$ in $\mathbf{CP}^{N'-1}$, $N' = \binom{4m}{2m}$, data dall'applicazione iniettiva χ che associa a una matrice $2m \times 4m$ rappresentativa di un punto di $Gr(2m, 4m)$ la N' -upla ordinata dei suoi minori di ordine massimo. Le matrici del tipo (E_{2m}, Z) rappresentano biunivocamente una sottovarietà A di $Gr(2m, 4m)$; e sia X la sottovarietà di A rappresentata dalle matrici (E_{2m}, Z) soddisfacenti la condizione $Z = {}^tZ$, cioè la $(2')$.

È allora immediato che χ è una immersione di X in Ω : infatti $\int_T \omega_i \wedge \omega_j \wedge \Omega^{(2m-1)} = 0$ implica $\int_T \varphi \wedge \varphi = \int_T \varphi \wedge \psi = 0$. Con argomentazioni analoghe a quelle seguite in [2] (pag. 835) si prova che $\chi(\mathcal{S}_{(2m)}) \subset \mathfrak{A}$, e cioè $\chi(\mathcal{S}_{(2m)}) \subset \chi(X) \cap \mathfrak{A}$. Si ha anche, come ora dimostreremo, $\chi(\mathcal{S}_{(2m)}) \supset \chi(X) \cap \mathfrak{A}$.

A questo scopo basta provare che, se $\omega \in X$ è tale che $\chi(\omega) \in \mathfrak{A}$, allora $\omega \in \mathcal{S}_{(2m)}$. Si ha infatti $\int_T \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{2m} \wedge \bar{\omega}_1 \wedge \dots \wedge \bar{\omega}_{2m} > 0$, ossia

$\int_T \prod_{i=1}^{2m} (\omega_i \wedge \bar{\omega}_i) > 0$; e si ha poi:

$$-4 \int_T \left(\frac{i}{2} \omega_i \wedge \bar{\omega}_i \right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2m} \left(\frac{i}{2} \omega_j \wedge \bar{\omega}_j \right) = -2i \int_T (\omega_i \wedge \bar{\omega}_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2m-1} \left(\frac{i}{2} \omega_j \wedge \bar{\omega}_j \right)$$

da cui, supposto $\Omega = \frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^{2m} h_{ij} \omega_i \wedge \bar{\omega}_j$ con $h_{ij} = \bar{h}_{ji} \in \mathbf{C}$, segue

$$\frac{i}{(2m-1)!} \int_T \omega_i \wedge \bar{\omega}_i \wedge \Omega^{(2m-1)} > 0. \text{ Resta così provato il seguente}$$

TEOREMA. *L'applicazione iniettiva χ dà una rappresentazione di $\mathcal{S}_{(2m)}$ su un aperto $\mathcal{A}$ di una quadrica Ω in $\mathbf{CP}^{N-1}$, $N = \frac{1}{m+1} \binom{4m+1}{2m}$, e $\chi(\mathcal{S}_{(2m)})$ è l'intersezione di $\mathcal{A}$ con una varietà algebrica.*

Ne discende il

COROLLARIO. *Se $m=1$ si ha $\chi(X) = \Omega$ e quindi $\chi(\mathcal{S}_{(2m)}) = \mathcal{A}$.*

Osservazione. In [3] (pp. 74, 75) Siegel ottiene mediante una verifica diretta che il dominio simmetrico di tipo III

$$\mathcal{S}_{(2)} = \left\{ Z = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbf{C}, \operatorname{Im} Z > 0, \operatorname{Im} a > 0 \right\}$$

e il dominio simmetrico di tipo IV

$$\mathcal{H}_{(3)} = \left\{ z = (z_1, \dots, z_5) \in \mathbf{CP}^4 \mid {}^t z H z = 0, {}^t z H \bar{z} > 0, \operatorname{Im} \frac{z_4}{z_5} > 0, H = \begin{pmatrix} -E_3 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \right\}$$

sono analiticamente equivalenti. Questo risultato può anche essere ottenuto, per altra via, come conseguenza del corollario precedente.

Sia infatti (p^+, p^-) la segnatura della forma quadratica $Q(\gamma)$; com'è noto si ha

$$(3) \quad p^+ + p^- = \dim H^2(T, \mathbf{R}) = 6 = (\text{secondo numero di Betti di } T).$$

D'altra parte, per il teorema dell'indice di Hodge (cfr. ad esempio [4]), si ha $p^+ = 3$ e quindi anche $p^- = 3$. Le relazioni fra i periodi di φ considerate nei numeri precedenti sono ora

$$(4) \quad \begin{cases} {}^t \omega C \omega = 0 \\ {}^t \omega C \bar{\omega} > 0 \\ {}^t \omega C n = 0, \end{cases}$$

dove $n = (n_1 \dots n_6)$ con $n_i = \int_T \Omega \in \mathbf{Z}$ e definiscono un aperto $\mathcal{A}$ di una quadrica in un $\mathbf{CP}^4$.

Se ${}^t\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_5)$ sono coordinate omogenee in tale $\mathbf{CP}^4$, $\mathfrak{U}$ si può rappresentare con relazioni del tipo

$$(5) \quad \begin{cases} {}^t\zeta S \zeta = 0 \\ {}^t\zeta S \bar{\zeta} > 0, \end{cases}$$

dove S è una matrice quadrata di ordine 5, simmetrica, non singolare, di segnatura (2,3). Il dominio $\mathfrak{U}$ definito dalle (4) o dalle (5) è costituito da due componenti connesse, ciascuna delle quali è un dominio simmetrico di tipo IV.

Il corollario precedente afferma che $\mathfrak{S}_{(2)}$ e $\mathfrak{N}_{(3)}$ parametrizzano entrambi una famiglia massimale di superficie abeliane con polarizzazione principale; e si ottiene così in più una ragione geometrica per l'isomorfismo tra $\mathfrak{S}_{(2)}$ ed $\mathfrak{N}_{(3)}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. ANDREOTTI - *Lezioni di Geometria Superiore*, Università di Pisa, anno accademico 1970-71, appunti redatti da A. Hefez.
- [2] P. A. GRIFFITHS (1968) - *Periods of integrals on algebraic manifolds, II*, « Am. Journ. of Math. », 90.
- [3] C. L. SIEGEL (1943) - *Symplectic geometry*, « Am. Journ. of Math. », 65.
- [4] A. WEIL (1958) - *Introduction à l'étude des variétés kähleriennes*, Paris, Hermann.