Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alessandro Scarselli

Una osservazione sulla classe di Fitting normale minima

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **58** (1975), n.4, p. 499–500.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_4_499_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1975.

Algebra. — *Una osservazione sulla classe di Fitting normale minima* (*). Nota di Alessandro Scarselli, presentata (**) dal Corrisp. G. Zappa.

Summary. — It is shown that for every finite abelian group B, there exists a finite soluble group G, such that $G/G_{\mathscr{H}} \simeq B$, where $\mathscr{H}$ is the minimal normal Fitting class.

Sia $\mathscr{S}$ la classe dei gruppi finiti risolubili astratti. Ricordiamo che se $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{S}$, allora $\mathscr{F}$ è detta una classe di Fitting se sono verificate le seguenti condizioni:

(1) Se $G \in \mathscr{F}$ e $N \trianglelefteq G$, allora $N \in \mathscr{F}$

(2) Se $G = N_1 N_2$ con $N_i \trianglelefteq G$ e $N_i \in \mathscr{F}$ $(i = 1, 2)$, allora $G \in \mathscr{F}$.

Se $\mathscr{F}$ è una classe di Fitting, con $G_{\mathscr{F}}$ indicheremo l'$\mathscr{F}$-radicale del gruppo G, ovvero l'unione dei sottogruppi normali di G che appartengono ad $\mathscr{F}$.

La classe di Fitting $\mathscr{F}$ è detta normale se, per ogni $G \in \mathscr{S}$, $G_{\mathscr{F}}$ è $\mathscr{F}$-massimale in G, ovvero non è contenuto propriamente in alcun sottogruppo di G, che appartenga ad $\mathscr{F}$.

Si ha che una classe di Fitting normale non banale (cioè non costituita dal solo gruppo identico) contiene ogni gruppo nilpotente e che, l'intersezione di una famiglia di classi di Fitting normali è ancora una classe di Fitting normale ([1]).

In particolare l'intersezione di tutte le classi di Fitting normali non banali è una classe di Fitting normale e non banale, che indicheremo con $\mathscr{H}$.

In ([1]) viene mostrato che una classe di Fitting $\mathscr{F}$ è normale, se e solo se $G/G_{\mathscr{F}}$ è abeliano, per ogni $G \in \mathscr{S}$.

In particolare, se $G \in \mathscr{S}$, allora $G/G_{\mathscr{H}}$ è abeliano.

Mostreremo che, per ogni gruppo abeliano finito B, esiste un gruppo $G \in \mathscr{S}$ con $G/G_{\mathscr{H}} \simeq B$.

Si ottiene, in particolare, che ogni gruppo abeliano finito è isomorfo a un sottogruppo del gruppo di Lausch ([2], 2.4 Theorem).

Teorema (Zappa [3]). *Sia p un numero primo,* A *il gruppo ciclico d'ordine $p - 1$ e sia χ una classe di Fitting. Sia $G \in \mathscr{S}$ e sia $R = G_{\chi}$.*

Sia S *una* G*-serie principale di* R. *Siano $M_1, M_2, \cdots, M_r$ i fattori principali appartenenti ad* S *il cui ordine è potenza di p. Sia D_i la rappresentazione di* G *in* $GL(M_i)$ *ottenuta per mezzo di M_i. Per ogni $g \in G$ sia $d_i(g)$ il determinante della matrice $D_i(g)$, e sia* $d^{p}_{G,R}(g) = \prod_{i=1}^{r} d_i(g)$.

(*) Eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 aprile 1975.

Allora $d^p_{G,R}$ *è* un *omomorfismo di* G *in* A, *e la classe* $\mathcal{F}$ *dei gruppi per cui* $d^p_{G,R}(G) = 1$ *è una classe di Fitting normale non banale.*

TEOREMA. *Sia* B *un gruppo abeliano finito, allora esiste un gruppo* $G \in \mathcal{S}$, *tale che* $G/G_{\mathcal{H}} \simeq B$.

Dimostrazione. Sia $B = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_s$ con C_i ciclico $(i = 1, 2, \cdots, s)$

Per un noto Teorema di Dirichlet, nella progressione aritmetica $\{n|B| + 1\}$ cadono infiniti numeri primi, ed esisteranno quindi numeri primi distinti $p_1, p_2, \cdots, p_s$ tali che $|B|$ divide $p_i - 1$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$.

Poiché $|C_i|$ divide $p_i - 1$, C_i è isomorfo a un gruppo $\bar{C}_i$ di automorfismi del gruppo Z_i d'ordine p_i. Indichiamo con Ω_i l'olomorfo di Z_i tramite $\bar{C}_i$ e sia $\Omega = \underset{i=1}{\overset{s}{\times}} \Omega_i$.

Se nel Teorema di Zappa, χ è la classe dei p-gruppi finiti (p primo), si ottiene che, se nel gruppo G, il p-sottogruppo normale massimo, ovvero l'χ-radicale di G, ha ordine p, allora esso è nel centro di $G_{\mathcal{F}}$.

Abbiamo infatti che G_χ, essendo nilpotente, è incluso in $G_{\mathcal{F}}$ e che gli elementi di $G_{\mathcal{F}}$ devono indurre l'automorfismo identico su G_χ, avendo G_χ ordine primo. Essendo $G_\chi \subseteq G_{\mathcal{H}} \subseteq G_{\mathcal{F}}$, si ha che G_χ è incluso nel centro di $G_{\mathcal{H}}$.

Consideriamo il gruppo Ω. Il gruppo Z_i è l'unico sottogruppo di ordine p_i di Ω_i è, per di più, Z_i coincide con il sottogruppo di Fitting $F(\Omega_i)$ di Ω_i. Il sottogruppo di Fitting di Ω è $F(\Omega) = \underset{i=1}{\overset{s}{\times}} F(\Omega_i) = \underset{i=1}{\overset{s}{\times}} Z_i$.

Essendo $p_1, p_2, \cdots, p_s$ primi distinti, si conclude che il p_i-sottogruppo normale massimo di Ω è Z_i, ovvero, per i ragionamenti precedenti, si ha che Z_i è nel centro di $\Omega_{\mathcal{H}}$ e quindi $F(\Omega)$ è nel centro di $\Omega_{\mathcal{H}}$.

Poiché, in un gruppo finito risolubile, il sottogruppo di Fitting contiene il proprio centralizzante, deve essere $\Omega_{\mathcal{H}} = F(\Omega)$.

Essendo infine $\Omega/F(\Omega) \simeq B$, il Teorema è provato.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. BLESSENHOL and W. GASCHÜTZ (1970) – *Über normale Schunk-und Fittingklassen*, «Math. Zeit.», *118*, 1–8.

[2] H. LAUSCH (1973) – *On normal Fitting classes*, «Math. Zeit.», *130*, 67–72.

[3] G. ZAPPA – *Su certe classi di Fitting normali* (in corso di stampa).