Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

R. Wiegandt, J. Wiesenbauer

Über die Unabhängigkeit der distributivitäisbedingungen

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **58** (1975), n.6, p. 819–822.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_6_819_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1975.

Algebra. — *Über die Unabhängigkeit der distributivitätsbedingungen.* Nota di R. WIEGANDT e J. WIESENBAUER, presentata [(*)] dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

RIASSUNTO. — La questione dell'indipendenza delle condizioni di distributività è risolta, in questa Nota, per le strutture algebriche dotate di due operazioni associative.

G. Szász hat in [4] und [5] das von Rédei aufgeworfene Problem der Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen einer multiplikativen Struktur gelöst. In [1], [2], [3] hat Boccioni die Frage der Unabhängigkeit der Distributivitätsbedingungen für solche Strukturen mit zwei Verknüpfungen beantwortet, für welche *i*) keine weitere Voraussetzungen gefordert sind, *ii*) eine der Verknüpfungen assoziativ ist, *iii*) eine oder beide Verkhüpfungen kommutativ sind. Schwieriger ist aber die Frage, wenn man – wie dies sehr häufig der Fall ist – die Assoziativität von beiden Verknüpfungen verlangt. Schon in [6] wurden Strukturen mit assoziativen Verknüpfungen und kommutativer Addition betrachtet. Da aber dort die Frage der Unabhängigkeit der Distributivitätsbedingungen für Strukturen mit 3 Elementen nicht beantwortet werden konnte, wurde [6] nicht veröffentlicht. In dieser kurzen Note ist die Frage der Unabhängigkeit der Distributivitätsbedingungen für Strukturen mit assoziativen Verknüpfungen mit Hilfe eines Computers vollständig gelöst.

Sei dazu S_ν eine Menge der Mächtigkeit ν, auf der eine additive Verknüpfung $+$ und eine multiplikative Verknüpfung $\cdot$ definiert ist und **D** die Menge aller Distributivitätsbedingungen $x(y+z) = xy + xz$ und $(y+z)x = yx+zx$ mit $x, y, z \in S_\nu$, für die wir im folgenden abkürzend $x(y, z)$ bzw. $(y, z)x$ schreiben.

Eine Teilmenge **A** von **D** nennen wir vollständig, wenn aus dem Erfülltsein der Distributivitätsbedingungen von **A** das Erfülltsein aller Distributivitätsbedingungen von **D** folgt und unabhängig, wenn man zu jeder Distributivitätsbedingung von **A** eine Struktur S_ν finden kann, so dass in S_ν die betrachtete Distributivitätsbedingung nicht erfüllt ist, alle übrigen Distributivitätsbedingungen von **A** jedoch erfüllt sind. Durch folgenden Satz, der damit die Lösüng des eingangs erwähnten Problems angibt, werden nun unter verschiedenen Voraussetzungen über $+$ und $\cdot$ alle unabhängigen vollständigen Teilmengen von **D** bestimmt. Ergänzend sei dazu noch bemerkt, dass für $\nu = 1$ stets die leere Menge $\varnothing$ die einzige unabhängige vollständige Teilmenge von **D** ist.

(*) Nella seduta dell'11 giugno 1975.

Tabelle

Nicht erfüllte Distributivitätsbed	Strukturtafeln		Fall
$a\,(a\,,a)$	$\begin{array}{c\|ccc} + & a & b & c \\ \hline a & b & c & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & b & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$	*a*) *b*)
$a\,(a\,,a)\,,\,(a\,,a)\,a$	$\begin{array}{c\|ccc} + & a & b & c \\ \hline a & b & c & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$	*c*) *d*)
$b\,(a\,,a)$	$\begin{array}{c\|ccc} + & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & b & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$	*a*) *b*)
$b\,(a\,,a)\,,\,(a\,,a)\,b$	$\begin{array}{c\|ccc} + & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & b & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$	*c*) *d*)
$(a\,,b)\,a$	$\begin{array}{c\|ccc} + & a & b & c \\ \hline a & a & b & a \\ b & b & b & b \\ c & c & b & c \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & c & b & c \\ c & c & b & c \end{array}$	*a*)
$a\,(a\,,b)\,,\,a\,(b\,,a)$	$\begin{array}{c\|ccc} + & a & b & c \\ \hline a & a & b & a \\ b & b & b & b \\ c & a & b & c \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{array}$	*b*)
$(a\,,b)\,a\,,\,a\,(a\,,b)$	$\begin{array}{c\|ccc} + & a & b & c \\ \hline a & a & b & a \\ b & b & b & b \\ c & c & b & c \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$	*c*)
$a\,(a\,,b)\,,\,a\,(b\,,a)\,,$ $(a\,,b)\,a\,,\,(b\,,a)\,a$	$\begin{array}{c\|ccc} + & a & b & c \\ \hline a & a & b & a \\ b & b & b & b \\ c & a & b & c \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$	*d*)

Segue: TABELLE.

<table>
<tr><th>Nicht erfüllte Distributivitätsbed.</th><th>Strukturtafeln</th><th>Fall</th></tr>
<tr><td>$a(b, c)$</td><td>$\begin{array}{c|ccc} + & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & b & b \\ c & a & c & c \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & b & a \\ b & a & b & b \\ c & a & b & c \end{array}$</td><td>*a*)</td></tr>
<tr><td>$a(b, c), a(c, b)$</td><td>$\begin{array}{c|ccc} + & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & b & b & c \\ c & c & c & c \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & b & a \\ b & a & b & b \\ c & a & b & c \end{array}$</td><td>*b*)</td></tr>
<tr><td>$a(b, c), (b, c)a$</td><td>$\begin{array}{c|ccc} + & a & b & c \\ \hline a & a & a & c \\ b & b & b & c \\ c & c & c & c \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & b & a \\ b & b & b & b \\ c & a & b & c \end{array}$</td><td>*c*)</td></tr>
<tr><td>$a(b, c), a(c, b)$,
$(b, c)a, (c, b)a$</td><td>$\begin{array}{c|ccc} + & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & b & b & c \\ c & c & c & c \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & b & a \\ b & b & b & b \\ c & a & b & c \end{array}$</td><td>*d*)</td></tr>
</table>

SATZ. *Ist* $\nu > 2$ *und* $+$ *und* $\cdot$ *assoziativ, so gilt*:

a) *Ist über* $+$ *und* $\cdot$ *nichts weiter vorausgesetzt, so ist* **D** *selbst eine unabhängige vollständige Teilmenge von* **D**.

b) *Ist* $+$ *als kommutativ, vorausgesetzt, so sind genau die Vertretersysteme der Klasseneinteilung*

$$\{\{x(y, z), x(z, y)\} \mid x, y, z \in S_\nu\} \cup \{\{(y, z)x, (z, y)x\} \mid x, y, z \in S_\nu\}$$

von **D** *die unabhängigen vollständigen Teilmengen von* **D**.

c) *Ist* $\cdot$ *als kommutativ vorausgesetzt, so sind genau die Vertretersysteme der Klasseneinteilung*

$$\{\{x(y, z), (y, z)x\} \mid x, y, z \in S_\nu\}$$

von **D** *die unabhängigen vollständigen Teilmengen von* **D**.

d) *Ist* $+$ *und* $\cdot$ *als kommutativ vorausgesetzt, so sind genau die Vertretersysteme der Klasseneinteilung*

$$\{\{x(y, z), x(z, y), (y, z)x, (z, y)x\} \mid x, y, z \in S_\nu\}$$

von **D** *die unabhängigen vollständigen Teilmengen von* **D**.

Für $\nu = 2$ *erhält man in allen Fällen* a)–d) *die unabhängigen vollständigen Teilmengen von* **D** *wie in* d) *angegeben.*

BEWEIS. Die Vollständigkeit der betrachteten Teilmengen von **D** ist für $\nu > 2$ trivial. Ihre Unabhängigkeit ergibt sich zunächst für $\nu = 3$ aus den in der Tabelle zusammengestellten Strukturen S_3, wenn man dabei noch die hinzunimmt, welche durch eine Permutation der Elemente von S_3 oder durch Spiegelung der Additionstafel oder der Miltiplikationstafel an den Hauptdiagonalen oder durch eine Kombination dieser Operationen aus den angegebenen Strukturen hervorgehen.

Für $\nu > 3$ erhält man eine entsprechende Tabelle, indem man die in der Tabelle angeführten Strukturtafeln in der Weise fortsetzt, dass man $x + y = x \cdot y = d$ für $x \neq a, b, c$ oder $y \neq a, b, c$ setzt, wo $d \in S_\nu$ beliebig, aber fest gewählt ist. Da bei dieser Fortsetzung die über $+$ und $\cdot$ in *a)–d)* gemachten Voraussetzungen sich nicht ändern und auch keine neuen nicht erfüllten Distributivitätsbedingungen dazukommen, ist der Satz für $\nu > 2$ vollständig bewiesen.

Für $\nu = 2$ beweist man die Unabhängigkeit der betrachteten Teilmengen mit der durch die Tafeln

$$\begin{array}{c|cc} + & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & b & b \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & b & a \end{array}$$

gegebenen Struktur S_2, für die genau $b(a, b)$, $b(b, a)$, $(a, b) b$, $(b, a) b$ nicht erfüllt sind, während in der hieraus durch Vertauschung von a und b hervorgehenden Struktur genau $a(b, a)$, $a(a, b)$, $(b, a) a$, $(a, b) a$ nicht erfüllt sind. Die Vollständigkeit der betrachteten Teilmenge beweist man am besten durch direktes Nachrechnen indem man alle möglichen Strukturen S_2 aufstellt. Es zeigt sich dabei, dass in jeder nichtdistributiven Struktur wenigstens eine nicht erfüllte Distributivitätsbedingung vorkommt, die auch in der betrachteten Teilmenge auftritt, womit der Satz bewiesen ist.

LITERATUR

[1] BOCCIONI D. (1958) – *Indipendenza delle condizioni di distributività*, «Rend. Sem. Mat. Padova», *28*, 1–30.

[2] BOCCIONI D. (1960) – *Condizioni di distributività ed associatività unilaterali*, «Rend. Sem. Mat. Padova», *30*, 178–193.

[3] BOCCIONI D. (1961) – *Condizioni di distributività con almeno una operazione commutativa*, «Rend. Sem. Mat. Padova», *31*, 87–103.

[4] SZÁSZ G. (1953) – *Die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen*, «Acta Sci. Math. Szeged», *15*, 20–28.

[5] SZÁSZ G. (1953) – *Über die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen kommutativer multiplikativer Strukturen*, «Acta Sci. Math. Szeged», *15*, 130–142.

[6] WIEGANDT R. (1954) – *A disztributivitás-feltételek függetlenségéröl*, «Preisschrift, Szeged».