Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ennio De Giorgi, Tullio Franzoni

Su un tipo di convergenza variazionale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **58** (1975), n.6, p. 842–850.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_6_842_0>

Calcolo delle variazioni. — *Su un tipo di convergenza variazionale.* Nota di Ennio De Giorgi e Tullio Franzoni, presentata [(*)] dal Corrisp. G. Stampacchia.

Summary. — The main properties of a new type of convergence, useful in several topics of calculus of variation are presented here.

Proofs and comparison with known results will appear in forthcoming papers.

1. Definizioni e proprietà generali

1.1. Definizione. Sia X uno spazio topologico, con topologia τ, e sia (f_h) una successione di funzioni da X in $\overline{\mathbf{R}}$, retta reale estesa, dotata della usuale struttura di insieme ordinato e di spazio topologico compatto.

Si definiscono le seguenti funzioni da X in $\overline{\mathbf{R}}$:

a) $\Gamma^-(\tau)\min\lim\limits_{h\to\infty} f_h(x) = \sup\limits_{U\in\mathcal{U}_x(\tau)} \min\lim\limits_{h\to\infty} \inf\limits_{y\in U} f_h(y) =$

$= \sup\limits_{U\in\mathcal{U}_x(\tau)} \sup\limits_{h} \inf\limits_{p\geq h} \inf\limits_{y\in U} f_p(y)$;

b) $\Gamma^-(\tau)\max\lim\limits_{h\to\infty} f_h(x) = \sup\limits_{U\in\mathcal{U}_x(\tau)} \max\lim\limits_{h\to\infty} \inf\limits_{y\in U} f_h(y)$;

c) $\Gamma^+(\tau)\min\lim\limits_{h\to\infty} f_h(x) = \inf\limits_{U\in\mathcal{U}_x(\tau)} \min\lim\limits_{h\to\infty} \sup\limits_{y\in U} f_h(y)$;

d) $\Gamma^+(\tau)\max\lim\limits_{h\to\infty} f_h(x) = \inf\limits_{U\in\mathcal{U}_x(\tau)} \max\lim\limits_{h\to\infty} \sup\limits_{y\in U} f_h(y)$,

ove $\mathcal{U}_x(\tau)$ è l'insieme degli intorni (aperti) di x per la topologia τ.

Quando non vi sarà possibilità di confusione, ometteremo il riferimento alla topologia τ, e scriveremo semplicemente $\Gamma^-\min\lim\limits_{h\to\infty} f_h$ e analoghi.

Inoltre, se un punto $x\in X$ è tale che $\Gamma^-(\tau)\min\lim\limits_{h\to\infty} f_h(x) = \Gamma^-(\tau)\max\lim\limits_{h\to\infty} f_h(x)$, indicheremo il loro comune valore con $\Gamma^-(\tau)\lim\limits_{h\to\infty} f_h(x)$, e diremo che esiste il Γ^-limite della successione (f_h) nel punto x, oppure che la successione (f_h) è Γ^-convergente nel punto x; analogo sarà il significato della scrittura $\Gamma^+(\tau)\lim f_h(x)$. Se poi ancora un punto x è tale che esistono i due limiti $\Gamma^-(\tau)\lim\limits_{h\to\infty} f_h(x)$, $\Gamma^+(\tau)\lim\limits_{h\to\infty} f_h(x)$,

(*) Nella seduta dell'11 giugno 1975.

e sono uguali, indicheremo il comune valore con $\Gamma(\tau)\lim\limits_{h\to\infty} f_h(x)$, e diremo che esiste il Γ-limite della successione (f_h) in x, oppure che la successione (f_h) Γ–converge in x.

1.2. OSSERVAZIONE. Se con δ indichiamo la topologia discreta su X, allora

$$\min\lim_{h\to\infty} f_h(x) = \Gamma^-(\delta)\min\lim_{h\to\infty} f_h(x) = \Gamma^+(\delta)\min\lim_{h\to\infty} f_h(x)\,,$$

$$\max\lim_{h\to\infty} f_h(x) = \Gamma^-(\delta)\max\lim_{h\to\infty} f_h(x) = \Gamma^+(\delta)\max\lim_{h\to\infty} f_h(x)\,.$$

1.3. OSSERVAZIONE. Se σ è una topologia su X, più fine di τ, valgono le disuguaglianze seguenti:

$$\Gamma^-(\tau)\min\lim \leq \Gamma^-(\sigma)\min\lim \leq \min\lim \leq \Gamma^+(\sigma)\min\lim \leq \Gamma^+(\tau)\min\lim\,;$$

$$\Gamma^-(\tau)\max\lim \leq \Gamma^-(\sigma)\max\lim \leq \max\lim \leq \Gamma^+(\sigma)\max\lim \leq \Gamma^+(\tau)\max\lim\,.$$

1.4. OSSERVAZIONE. Si ricava immediatamente dalle definizioni che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\Gamma^-\min\lim_{h\to\infty} f_h = -\Gamma^+\max\lim_{h\to\infty}(-f_h)\,;$$

$$\Gamma^-\max\lim_{h\to\infty} f_h = -\Gamma^+\min\lim_{h\to\infty}(-f_h)\,.$$

Ciò significa che ogni proprietà dei Γ^- limiti ha una traduzione immediata in una proprietà di Γ^+ limiti (e viceversa). Ci limiteremo perciò d'ora in poi ad enunciare le proprietà dei Γ^- limiti.

1.5. PROPOSIZIONE. *Se σ è una topologia su* X, *più fine di τ, ed* L *è un sottoinsieme di* X *σ–denso in* X, *e se le funzioni f_h sono continue rispetto a σ, ponendo*

$$g_h(x) = \begin{cases} f_h(x) & se\ \ x\in L \\ +\infty & se\ \ x\in L - X\,, \end{cases}$$

abbiamo

$$\Gamma^-(\tau)\min\lim_{h\to\infty}(g_h) = \Gamma^-(\tau)\min\lim_{h\to\infty}(f_h)\,,$$

$$\Gamma^-(\tau)\max\lim_{h\to\infty}(g_h) = \Gamma^-(\tau)\max\lim_{h\to\infty}(f_h)\,.$$

1.6. OSSERVAZIONE. Se (f_{h_p}) è una sottosuccessione di (f_h), si ha

$$\Gamma^-\min\lim_{h\to\infty} f_h \leq \Gamma^-\min\lim_{p\to\infty} f_{h_p} \leq \Gamma^-\max\lim_{p\to\infty} f_{h_p} \leq \Gamma^-\max\lim_{h\to\infty} f_h\,.$$

1.7. PROPOSIZIONE. *Sia x un punto di* X, *e sia $\xi < \Gamma^-\max\lim\limits_{h\to\infty} f_h(x)$. Esiste allora una sottosuccessione (f_{h_p}) di (f_h) Γ^-convergente in x tale che*

$$\Gamma^-\max\lim_{h\to\infty} f_h(x) \geq \Gamma^-\lim_{p\to\infty} f_{h_p}(x) > \xi\,.$$

1.8. PROPOSIZIONE. *Le funzioni* $\Gamma^{-} \min\lim_{h\to\infty} f_h$ *e* $\Gamma^{-} \max\lim_{h\to\infty} f_h$ *sono inferiormente semicontinue.*

1.9. OSSERVAZIONE. Se la successione è costante, cioè esiste f tale che $f_h = f$ per ogni h, allora

$$\Gamma^{-}(\tau) \lim_{h\to\infty} (f_h) = \mathrm{s.c.}^{-}(\tau)(f),$$

ove $\mathrm{s.c.}^{-}(\tau)(f)$ è la massima funzione inferiormente semicontinua (rispetto alla topolcgia τ) non maggiore di f. Se inoltre f è continua (sempre rispetto a τ), si ha

$$\Gamma \lim_{h\to\infty} (f_h) = f.$$

1.10. PROPOSIZIONE. *Sia* $\varphi : \overline{\mathbf{R}} \to \overline{\mathbf{R}}$ *continua e non decrescente. Allora*

$$\varphi \circ \Gamma^{-} \min\lim_{h\to\infty} (f_h) = \Gamma^{-} \min\lim_{h\to\infty} (\varphi \circ f_h),$$

e valgono le formule analoghe per gli altri Γ*–limiti.*

Non è pertanto in genere restrittivo supporre di considerare funzioni equilimitate.

1.11. PROPOSIZIONE. *Sia* $\psi : \overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}} \to \overline{\mathbf{R}}$ *continua e non decrescente in entrambe le variabili, e siano* (f_h), (g_h) *due successioni di funzioni da* X *in* $\overline{\mathbf{R}}$.

Poniamo

$$\psi_h(x) = \psi(f_h(x), g_h(x)).$$

Valgono allora le seguenti disuguaglianze:

$$\psi(\Gamma^{-} \min\lim_{h\to\infty} f_h(x), \Gamma^{-} \min\lim_{h\to\infty} g_h(x)) \leq$$

$$\leq \Gamma^{-} \min\lim_{h\to\infty} \psi_h(x) \leq \psi(\Gamma^{-} \min\lim_{h\to\infty} f_h(x), \Gamma^{+} \max\lim_{h\to\infty} g_h(x)),$$

$$\psi(\Gamma^{-} \max\lim_{h\to\infty} f_h(x), \Gamma^{-} \min\lim_{h\to\infty} g_h(x)) \leq$$

$$\leq \Gamma^{-} \max\lim_{h\to\infty} \psi_h(x) \leq \psi(\Gamma^{-} \max\lim_{h\to\infty} f_h(x), \Gamma^{+} \max\lim_{h\to\infty} g_h(x)),$$

ed anche

$$\Gamma^{-} \min\lim_{h\to\infty} \psi_h(x) \leq \psi(\Gamma^{-} \max\lim_{h\to\infty} f_h(x), \Gamma^{+} \min\lim_{h\to\infty} g_h(x)).$$

In particolare, se esistono i limiti seguenti, si ha:

$$\psi(\Gamma^{-} \lim_{h\to\infty} f_h(x), \Gamma^{-} \lim_{h\to\infty} g_h(x)) \leq$$

$$\leq \Gamma^{-} \lim_{h\to\infty} \psi_h(x) \leq \psi(\Gamma^{-} \lim_{h\to\infty} f_h(x), \Gamma^{+} \lim_{h\to\infty} g_h(x)),$$

$$\Gamma^{-} \lim_{h\to\infty} \psi_h(x) = \psi(\Gamma^{-} \lim_{h\to\infty} f_h(x), \Gamma \lim_{h\to\infty} g_h(x)).$$

Questa proposizione trova applicazioni nel calcolo di somme, prodotti, massimi o minimi fra Γ–limiti, etc.

2. APPLICAZIONI AL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

2.1. PROPOSIZIONE. *Sia* A *un aperto di* X. *Se per ogni* $x \in A$ *esiste il* $\Gamma^- \lim\limits_{h\to\infty} f_h(x)$, *si ha*

$$\inf_{x\in A} \Gamma^- \lim_{h\to\infty} f_h(x) \geq \max \lim_{h\to\infty} (\inf_{x\in A} f_h(x)) .$$

2.2. LEMMA. *Sia* x *un punto di* X, *e sia* (x_h) *una successione di punti di* X, *convergente ad* x.

Allora si ha

$$\Gamma^- \min \lim_{h\to\infty} f_h(x) \leq \min \lim_{h\to\infty} f_h(x_h) ,$$

$$\Gamma^- \max \lim_{h\to\infty} f_h(x) \leq \max \lim_{h\to\infty} f_h(x_h) .$$

2.3. PROPOSIZIONE. *Sia* K *un sottoinsieme sequenzialmente compatto di* X, *e supponiamo che per ogni* $x \in K$ *esista il* $\Gamma^- \lim\limits_{h\to\infty} f_h(x)$.

Allora si ha

$$\min_{x\in K} \Gamma^- \lim_{h\to\infty} f_h(x) \leq \min \lim_{h\to\infty} (\inf_{x\in K} f_h(x)) .$$

2.4. COROLLARIO. *Sia* K *un sottoinsieme sequenzialmente compatto di* X, *e sia* A *un aperto di* X *contenente* K.

Sia (f_h) *una successione di funzioni soddisfacenti la condizione*

$$\inf_{x\in K} f_h(x) = \inf_{x\in A} f_h(x) .$$

Allora, se la successione (f_h) Γ^-*converge in ogni punto di* A, *ponendo* $f(x) = \Gamma^- \lim\limits_{h\to\infty} f_h(x)\ \forall x \in A$, *si ottiene*

$$\min_{x\in A} f_h(x) = \min_{x\in K} f(x) = \lim_{h\to\infty} (\inf_{x\in K} f_h(x)) = \lim_{h\to\infty} (\inf_{x\in A} f_h(x)) .$$

Se inoltre (u_h) *è una successione di punti di* X *che converge a* $u \in A$, *e se* $f_h(u_h)$ *tende a* $\min\limits_{x\in A} f(x)$, *allora* $f(u) = \min\limits_{x\in A} f(x)$.

Come caso particolare, ciò avviene se $f_h(u_h) = \min\limits_{x\in A} f_h(x)$.

3. Γ–CONVERGENZA E DISTANZE ESTESE

3.1. PROPOSIZIONE. *Sia x un punto di X, dotato di un sistema fondamentale numerabile di intorni.*

Allora

1) $\Gamma^- \min\lim\limits_{h\to\infty} f_h(x) = \xi \Longleftrightarrow$

i) *per ogni successione* (x_h) *tendente ad* x,

$$\min\lim_{h\to\infty} f_h(x_h) \geq \xi\,;$$

ii) *esiste una successione* (x_h) *tendente ad* x, *tale che*

$$\min\lim_{h\to\infty} f_h(x_h) = \xi\,.$$

2) $\Gamma^- \max\lim\limits_{h\to\infty} f_h(x) = \xi \Longleftrightarrow$

i) *per ogni successione* (x_h) *tendente ad* x,

$$\max\lim_{h\to\infty} f_h(x_h) \geq \xi\,;$$

ii) *esiste una successione* (x_h) *tendente ad* x, *tale che*

$$\max\lim_{h\to\infty} f_h(x_h) = \xi\,.$$

3) $\Gamma^- \lim\limits_{h\to\infty} f_h(x) = \xi \Longleftrightarrow$

i) *per ogni successione* (x_h) *tendente ad* x,

$$\min\lim_{h\to\infty} f_h(x_h) \geq \xi\,;$$

ii) *esiste una successione* (x_h) *tendente ad* x, *tale che*

$$\lim_{h\to\infty} f_h(x_h) = \xi\,.$$

3.2. PROPOSIZIONE. *Sia x un punto di X, dotato di un sistema fondamentale numerabile di intorni. Allora per ogni successione* (f_h) *esiste una sottosuccessione* (f_{h_p}) *tale che*

$$\Gamma^- \lim_{p\to\infty} (f_{h_p})(x) = \Gamma^- \min\lim_{h\to\infty} f_h(x)\,.$$

Sono particolarmente importanti spazi in cui tutti i punti hanno un sistema fondamentale numerabile di intorni. Fra essi considereremo in questo paragrafo gli spazi in cui la topologia è indotta da una distanza estesa.

3.3. DEFINIZIONE. Chiamiamo distanza estesa su X una funzione $\delta : X \times X \to \overline{\mathbf{R}}$ che gode delle seguenti proprietà:

1) $\delta(x, y) \geq 0$, $\delta(x, x) = 0$,

2) $\delta(x, y) = \delta(y, x)$,

3) $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$,

per ogni $x, y, z \in X$ (cioè, differentemente da una normale distanza, la funzione δ può assumere il valore $+\infty$, ed inoltre $\delta(x, y) = 0$ non implica necessariamente $x = y$).

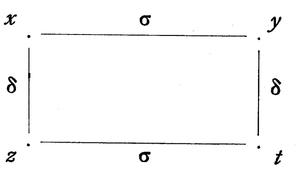
Una distanza estesa δ induce su X una topologia, in cui un sistema fondamentale di intorni di x è dato dagli insiemi del tipo $\{y \in X \mid \delta(x, y) < \varepsilon\}$, con ε numero positivo.

Con $\Gamma(\delta) \min \lim\limits_{h \to \infty} f_h(x)$ e analoghi indicheremo i Γ–limiti effettuati nella topologia indotta dalla distanza estesa δ.

3.4. DEFINIZIONE. Siano δ, σ due distanze estese su X. δ e σ si dicono compatibili se esiste una costante $c \geq 0$ tale che $\forall x, y, z \in X$ esiste $t \in X$ tale che

i) $\delta(t, y) \leq \delta(x, z) + c \cdot \min(\delta(x, z), \sigma(x, y))$,

ii) $\sigma(t, z) \leq \sigma(x, y) + c \cdot \min(\delta(x, z), \sigma(x, y))$.



3.5. OSSERVAZIONE. *a*) ogni distanza estesa è compatibile con se stessa;

b) se σ e δ sono distanze estese su un gruppo abeliano G, invarianti per traslazioni (cioè $\delta(x + t, y + t) = \delta(x, y)$, $\sigma(x + t, y + t) = \sigma(x, y)$ $\forall x, y, t \in G$), allora sono compatibili.

c) se σ è una distanza estesa qualsiasi, e δ è la distanza estesa discreta (cioè $\delta(x, x) = 0$, $\delta(x, y) = +\infty$ se $x \neq y$), allora σ e δ sono compatibili;

d) osserviamo esplicitamente che la compatibilità non è una relazione transitiva.

3.6. TEOREMA. *Siano δ e σ due distanze estese compatibili su* X. *Supponiamo che (f_h) sia una successione di funzioni δ–equilipshitziane, che esista cioè una costante reale* $K > 0$ *tale che*

$$|f_h(x) - f_h(y)| \leq K\delta(x, y) \qquad \forall h, \forall x, y \in X\ ^{(1)}.$$

(1) Qui e nel seguito, assumiamo che

$|f(x) - f(y)| = 0$ se $f(x) = f(y) = +\infty$, oppure $f(x) = f(y) = -\infty$.

Allora, se per ogni $x \in X$ *esiste il* $\Gamma^-(\sigma)\lim_{h\to\infty} f_h(x)$, *anche esso è* δ*–lipshitziano con la medesima costante* K, *cioè*

$$|\Gamma^-(\sigma)\lim_{h\to\infty} f_h(x) - \Gamma^-(\sigma)\lim_{h\to\infty} f_h(y)| \leq K\delta(x,y) \qquad \forall x, y \in X .$$

3.7. TEOREMA. *Siano* δ *e* σ *due distanze estese compatibili su* X. *Supponiamo inoltre che* X *abbia una base numerabile di aperti per la topologia indotta da* σ, *e che* (f_h) *sia una successione di funzioni* σ*–equilipshitziane, che esista cioè una costante reale* $K > 0$ *tale che*

$$|f_h(x) - f_h(y)| \leq K\sigma(x,y) \qquad \forall h, \quad \forall x, y \in X .$$

È allora possibile estrarre una sottosuccessione (f_{h_p}) *di* (f_h) *che* $\Gamma^-(\delta)$ *converge in ogni punto* x *di* X.

3.8. TEOREMA. *Siano* δ *e* σ *due distanze estese compatibili su* X, *e siano* (f_h), (g_h) *due successioni di funzioni rispettivamente* δ *e* σ*–equilipshitziane, che esista cioè una costante reale* $K > 0$ *tale che*

$$|f_h(x) - f_h(y)| \leq K\delta(x,y),$$

$$|g_h(x) - g_h(y)| \leq K\sigma(x,y). \qquad Ah, Ax, y \in X .$$

Supponiamo inoltre che α *sia un'altra distanza estesa su* X, *verificante*

$$\alpha(x,y) \leq \delta(x,y),$$

$$\alpha(x,y) \leq \sigma(x,y) \qquad \forall x, y \in X,$$

e tale che esista una costante $H > 0$ *per cui*

$$\alpha(x,y) \geq H \inf_{z\in X} (\delta(x,z), \sigma(z,y)) .$$

Sia poi $\psi : \overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}} \to \overline{\mathbf{R}}$ *continua e non decrescente in entrambe le variabili.*

Allora, se poniamo $\psi_h(x) = \psi(f_h(x), g_h(x))$, *e se un punto* $x \in X$ *è tale che esistono* $\Gamma^-(\sigma)\lim_{h\to\infty} f_h(x)$, $\Gamma^-(\delta)\lim_{h\to\infty} g_h(x)$, *esiste anche* $\Gamma^-(\alpha)\lim_{h\to\infty}\psi_h(x)$ *e si ha*

$$\Gamma^-(\alpha)\lim_{h\to\infty}\psi_h(x) = \psi(\Gamma^-(\sigma)\lim_{h\to\infty} f_h(x), \Gamma^-(\delta)\lim_{h\to\infty} g_h(x)) .$$

4. CONSIDERAZIONI FINALI

La teoria sopraesposta sembra idonea a inquadrare vari risultati contenuti nei lavori citati nella bibliografia (in particolare il paragrafo 3 è un po' la formulazione astratta di alcuni procedimenti usati in [4]); essa però probabilmente consente anche la considerazione di problemi di tipo molto diverso.

Ad esempio sarebbe molto interessante stabilire se è vera o falsa la seguente congettura:

Sia $X = C_0^1(\mathbf{R}^n)$ lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto con derivate del primo ordine continue, definite su $\mathbf{R}^n$.

Sia

$$\delta(u, v) = \int_{\mathbf{R}^n} |u - v| \, dx.$$

Sia

$$Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_x}\right) \text{ il gradiente di } u.$$

Sia

$$F_h(u) = \int_{\mathbf{R}^n} \{h^{-2} |Du|^2 + h^2 [1 - \cos(h \cdot u(x))]\} \, dx,$$

e sia

$$F(u) = \int_{\mathbf{R}^n} |Du| \, dx.$$

Esiste allora una costante positiva c tale che

$$\Gamma^-(\delta) \lim_{h \to \infty} F_h(u) = cF(u) \qquad \forall u \in C_0^1(\mathbf{R}^n).$$

BIBLIOGRAFIA

[1] I. BABUŠKA (1974) – *Solutions of Interface Problems by Homogenisation*, I–II, « Inst. for Fluid Dynamics and Appl. Math. », Univ. of Maryland, 1974.

[2] L. BOCCARDO e P. MARCELLINI – *Sulla convergenza delle soluzioni di disequazioni variazionali*, di prossima pubblicazione.

[3] L. CARBONE – *Sur la Γ–convergence des intégrales du type de l'énergie sur des fonctions à gradient borné*, di prossima pubblicazione.

[4] E. DE GIORGI (1975) – *Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'area*, « Rend. Matem. Univ. Roma ».

[5] E. DE GIORGI e S. SPAGNOLO (1973) – *Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del 2° ordine*, « Boll. U.M.I. », *8*.

[6] J. L. JOLY (1973) – *Une famille de topologies sur l'ensemble des fonctions convexes pour lequelles la polarité est bicontinue*, « J. Math. Pures Appl. », *52*.

[7] J. L. JOLY (1970) – *Une famille de topologies et des convergences sur l'ensemble des fonctionelles convexes*. These présentée a la Faculté de Sciences de Grenoble.

[8] C. KURATOWSKI (1958) – *Topologie*, Vol. I, Warszawa.

[9] J. L. LIONS, A. BENSOUSSAN e A. PAPANICOLAU – *Some asymptotic Results of variational Inequalities with higly oscillatory periodic coefficients*, di prossima pubblicazione.

[10] P. MARCELLINI (1973) – *Su una convergenza di funzioni convesse*, « Boll. U.M.I. », *8*.

[11] P. MARCELLINI (1973) – *Un teorema di passaggio al limite per la somma di funzioni convesse*, « Boll. U.M.I. », *11*.

[12] A. MARINO e S. SPAGNOLO (1969) – *Un tipo di approssimazione dell'operatore* $\sum_{ij} D_i(a_{ij} D_j)$ *con operatori* $\sum_j D_j(\beta D_j)$, « Annali Scuola Norm. Sup. Pisa », *23*.

[13] U. MOSCO (1969) – *Convergence of convex Sets and of Solutions of variational Inequalities*, « Advances in Math. », *3*.

[14] U. MOSCO (1971) – *On the Continuity of the Young-Fenchel Transform*, « J. Math. Anal. Appl. », *35*.

[15] E. SANCHEZ–PALENCIA (1970) – *Solutions périodiques par rapport aux variables d'espace et applications*, « C.R. Acad. Sci. Paris », Ser. A, 271.

[16] E. SANCHEZ–PALENCIA (1970) – *Equations aux derivées partielles dans un type de milieux hétérogènes*, « C.R. Acad. Sci. Paris », Ser. A, 272.

[17] E. SANCHEZ–PALENCIA (1974) – *Comportement local et macroscopique d'un type de milieux phisiques hétérogènes*, « Internat. J. Engrg. Sci. », *12*.

[18] C. SBORDONE (1975) – *Sulla G–convergenza di equazioni ellittiche e paraboliche*, « Ric. di Matematica ».

[19] C. SBORDONE – *Su alcune applicazioni di un tipo di convergenza variazionale*, di prossima pubblicazione.

[20] S. SPAGNOLO (1967) – *Sul limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore*, « Ann. Sc. Normale Sup. Pisa », *21*.

[21] S. SPAGNOLO (1968) – *Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche*, « Ann. Sc. Normale Sup. Pisa », *22*.

[22] L. TARTAR (1974) – *Convergence d'operateurs differentiels*. Analisi Convessa e Applicazioni, Quaderni dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R., Ist. Mat. G. Castelnuovo, Roma.

[23] T. ZOLEZZI (1973) – *Su alcuni problemi fortemente ben posti di controllo ottimo*, « Ann. Mat. Pura e Appl. », *95*.

[24] T. ZOLEZZI (1973) – *On Convergence of Minima*, « Boll. U.M.I. », *8*.