Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Andre Batbedat

Préalgèbres, biunalgèbres et unalgèbres. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **59** (1975), n.1-2, p. 8–13.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_1-2_8_0>

Algebra. — *Préalgèbres, biunalgèbres et unalgèbres.* Nota I [(*)]
di ANDRE BATBEDAT, presentata dal Corrisp. G. ZAPPA.

RIASSUNTO. — La categoria delle prealgebre su un anello è stata presentata nella Nota (1). Qui si introducono nuove categorie (biunalgebre e unalgebre) più generali di quelle delle algebre e si stabiliscono certe equivalenze di categorie.

INTRODUCTION

Dans (1) nous avons présenté les *préalgèbres* et déterminé la structure des préalgèbres idempotentes; pour cela l'opération dérivée appelée *disjonctions* a joué un role trés important.

Nous nous plaçons ici dans un contexte général et utilisons certaines opérations dérivées sur une préalgèbre pointée pour lui associer une algèbre avec deux applications: ainsi s'introduisent les *biunalgèbres* et, comme cas particulier, les *unalgèbres*.

Cette étude conduit à des équivalences de catégories qui généralisent l'équivalence classique entre la catégorie des espaces affines pointés et celle des modules.

I. GÉNÉRALITÉS

Dans cette note nous utiliserons des définitions, notations et résultats de (1), Chapitre I. Ainsi π est un anneau de neutre 1 dont les éléments sont généralement notés $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ Un espace affine sur π peut être considéré comme un ensemble avec une opération affine (a, b, α, c) et une préalgèbre sur π est un tel espace affine avec un produit binaire distributif par rapport a l'opération affine; un morphisme de préalgèbres est une application qui respecte l'opération affine et le produit.

On montre qu'un espace affine peut aussi être considéré comme un ensemble avec des combinaisons linéaires pondérées (c'est à dire définies si et seulement si la somme des composantes scalaires vaut 1) que nous notons: $a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \cdots + a_n \alpha_n$; une préalgèbre est encore un ensemble avec des combinaisons linéaires pondérées et un produit distributif. Cette théorie est développée dans (4) et exposée dans (3); nous nous en servirons ici uniquement pour simplifier certaines démonstrations.

Comme dans (1), la loi ternaire $(a, b, 1, c)$ sur un espace affine est aussi notée $a - b + c$; c'est la combinaison linéaire pondérés $a1 + b(-1) + c1$.

(*) Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1975.

Soit Q un module sur π pour la somme $a \oplus b$ et la loi externe $a\alpha$; l'opération dérivée qui à a, b, c, dans Q et α dans π associe $a\alpha \ominus b\alpha \oplus c$ est une opération affine (vérifie A_1', A_2, A_3, de (1)): on l'appelle *l'opération affine canonique sur* Q. Ceci détermine la notion *d'application affine* entre deux modules; une application est linéaire si et seulement si elle est affine et respecte le neutre pour la somme.

Si Q est une π-algèbre pour le produit $a \times b$ (non nécessairement associative ou unitaire), ce produit est distributif par rapport a l'opération affine canonique donc Q est une préalgèbre avec zéro.

Réciproquement soit P une préalgèbre (non nécessairement associative) et $p \in$ P: l'ensemble P muni des lois dérivées:

$$a \oplus b = a - p + b \qquad \text{et} \quad a\alpha = (a\,,p\,,\alpha\,,p) = a\alpha + p\,(-\alpha) + p1\,,$$

est un *module* que l'on dit *pointé en* p. Si p est zéro pour le produit ab sur P, alors le module pointé en p muni du produit ab est une algébre.

Complétant cette correspondance en conservant les applications sous-jacentes aux morphismes, on voit que:

PROPOSITION I.1. *La catégoires des π-algèbres est équivalente à la catégorie des π-préalgèbres pointées sur un zéro.*

L'expression: « pointées sur un zéro », impose aux morphismes de respecter le zéro. Par contre, dans une algèbre unitaire l'application constante envoyant tout élément sur le neutre est un morphisme de préalgèbres ne respectant pas le zéro.

Nous venons de préciser en termes de catégories la proposition I. 5 de (1). De même en utilisant la dualité pour la disjonction, on peut énoncer:

PROPOSITION I.2. *La catégorie des π-préalgèbres pointées sur un neutre est équivalente à la catégorie des π-algèbres.*

Mais une préalgèbre ne contient pas nécessairement un zéro ou un neutre; ceci justifie donc l'introduction de nouvelles structures.

II. BIUNALGÈBRES, UNALGÈBRES

DÉFINITION II.1. $(Q,{}',{}'')$ *est une π-biunalgèbre si* Q *est une π-algèbre et* $'$ *(appelé prime),* $''$ *(appelé seconde) sont des endomorphismes affines de* Q *coïncidant sur le zéro* q *de* Q ($q' = q''$).

$(Q,{}')$ est une π-*unalgèbre* si Q est une π-algebre et prime un endomorphisme affine de Q.

Les unalgèbres s'identifient aux biunalgèbres pour lesquelles prime et seconde sont les mêmes lois unaires. Pour ces structures, les *morphismes* sont les morphismes d'algèbres respectant prime et seconde.

Soit $(Q, ', '')$ une biunalgèbre; on appelle *lois dilatées sur* Q:

i) L'opération affine canonique pour l'algèbre Q;

ii) Le produit dilaté: $ab = a' \oplus b'' \ominus (a \times b) \ominus q'$.

Pour une unalgèbre, le produit dilaté s'écrit encore: $ab = (a \oplus b)' \ominus \ominus (a \times b)$.

LEMME II.2. *Q muni des lois dilatées est une préalgèbre.*

Preuve. Le produit dilaté est distributif par rapport à l'opération affine.

On note B la catégorie des π-biunalgèbres, C la catégorie des π–unalgèbres (sous–catégorie pleine de B) et A la catégorie des π–préalgèbres pointées.

Le foncteur dilatant est le foncteur de B vers A défini de la façon suivante: pour un morphisme de B on conserve l'application sous–jacente et a l'objet $(Q, ', '')$ on associe la préalgèbre du Lemme II.2 pointée sur le zéro de l'algèbre initiale Q.

LEMME II.3. *Soit* $(Q, ', '')$ *un objet de* B; *prime, seconde, le zéro* q *de* Q *et le produit dilaté sont liés par*: $a' = aq$ et $a'' = qa$.

Ce lemme est immédiat; en particulier:

LEMME II.4. *L'image d'une unalgèbre par le foncteur dilatant est une préalgèbre pointée sur un élément central.*

Soit $(Q, ')$ un objet de C et (P, q) son image par le foncteur dilatant; q est le zéro de l'algèbre initiale Q; il est zéro dans la préalgèbre P si pour tout $a \in P : q = aq = a'$, c'est à dire si *la loi prime est l'application nulle*. Dans ce cas l'algèbre associée à (P, q) par la Proposition I.1 est l'algèbre opposée à Q; réciproquement, étant donné une algèbre, l'algèbre opposés avec l'application nulle est un objet de la catégorie C.

Ainsi:

PROPOSITION II.5. *La catègorie des π–algèbres s'identifie à une sous–catégorie pleine de la catégorie des π–unalgèbres.*

Soit $(Q, ')$ un objet de C et (P, q) son image par le foncteur dilatant; q est neutre pour la préalgèbre P si *prime est l'application identique*. Ainsi (avec la dualité pour la disjonction) nous avons une autre façon d'identifier la catégorie des π–algèbres à une sous–catégorie pleine de C.

III. LE FONCTEUR POINTANT

Soit (P, p) un objet de la catégorie A (π-préalgèbre pointée en p); on appelle *lois pointées en p sur* P:

i) La somme: $a \oplus b = a - p + b$;

ii) L'opération externe: $a\alpha = (a, p, \alpha, p) = a\alpha + p(1 - \alpha)$;

iii) Le produit: $a \times b = ap + pb - ab - pp + p$;

iv) La loi unaire prime: $a' = ap$;

v) La loi unaire seconde: $a'' = pa$.

Si p est central dans la préalgèbre P, prime et seconde coincident.

P avec la somme et l'opération externe est le module pointé en p du Chapitre I; on note P_p ce module muni du produit pointé en p.

LEMME III.1. P_p *est une* π*–algèbre.*

Preuve. $(a \times b)\,\alpha$ est la combinaison linéaire pondérée:

$$(ap)\,\alpha + (pb)\,\alpha + ab\,(-\alpha) + pp\,(-\alpha) + p\alpha + p\,(-\alpha) + p1$$

et c'est encore $(a\alpha) \times b$ ou $a \times (b\alpha)$. D'autre part, $(a \oplus b) \times c$ s'écrit avec la loi ternaire: $ap - pp + bp + pc - ac + pc - bc - pp + p$ et c'est encore $(a \times c) \oplus (b \times c)$; de même pour la distributivité à gauche.

La *translation* t_{ab} sur P est l'application qui envoie x sur $x - a + b$; on note T l'ensemble des translations de P.

PROPOSITION III.2. *La structure d'algèbre de* P_p *(lemme* III.1) *est indépendante de* p *et induit canoniquement une structure d'algèbre isomorphe sur* T.

Preuve. La translation t_{ab} est un isomorphisme de P_a vers P_b. D'autre part la bijection λ_a qui à $y \in P$ associe la translation t_{ay} induit sur T par transport de structure une algèbre isomorphe à P_a; comme λ_a est égale à la composée de t_{ab} puis λ_b les opérations induites sur T sont indépendantes de a.

T est *l'algèbre des translations de la préalgèbre* P.

P. Janin a établi les propriétés III.1 et III.2 dans le cas particulier d'un préanneau: par la définition 8 de (5) il présente l'anneau transformé d'un préanneau P par l'élément p (c'est l'anneau P_p actuel) et dans le Paragraphe 3 de (5) il construit à partir de P^2 un anneau qu'il appelle associé à P (c'est pratiquement l'anneau T des translations de P).

LEMME III.3. *Soit* $(P\,,p)$ *un objet de la catégorie* A : P_p *muni des lois pointées prime et seconde* ($a' = ap$ *et* $a'' = pa$) *est une* π*–biunalgèbre.*

Le foncteur pointant de A vers B est défini de la façon suivante: pour un morphisme de A on conserve l'application sous-jacente et à l'objet $(P\,,p)$ de A on associe la biunalgèbre du Lemme III.3.

LEMME III.4. *Les foncteurs dilatant et pointant sont réciproques.*

Preuve. On sait déjà que c'est vrai pour la correspondance entre modules et espaces affines pointés. Soit $(P\,,p)$ un objet de A et $(Q\,,',")$ son image par le foncteur pointant; pour le couple $(a\,,b)$ le produit dilaté sur Q s'écrit: $ap + pb - (ap + pb - ab - pp + p) - pp + p$; c'est donc le produit initial sur P.

La vérification est analogue dans l'autre sens; enfin on applique le Lemme II.3. Ainsi la réciprocité est vraie pour les objets; elle est triviale pour les morphismes.

Nous pouvons maintenant énoncer:

THÉORÈNE III.5. *La catégorie des π–préalgèbres pointées est équivalente à la catégorie des π–biunalgèbres;*

La catégorie des π–préalgèbres pointées sur un élément central est équi– à la catégorie des π–unalgèbres;

La catégorie des π–préalgèbres commutatives pointées est équivalente à la catégorie des π–unalgèbres commutatives.

On sait que la catégorie des Z–algèbres (resp. Z–préalgèbres), où Z est l'anneau des entiers relatifs, est équivalente à la catégorie des anneaux (resp. préanneaux). Dans ce contexte on peut definir les notions de *biunanneau* et de *unanneau* (prime et seconde respectent $a \ominus b \oplus c$) et adapter les résultats précédents...

IV. CAS PARTICULIERS IMPORTANTS

On considère les objets (P, p) de A et $(Q, ', '')$ de B, images réciproques par les foncteurs pointant et dilatant; ainsi les ensembles P et Q sont confondus et p est le zéro q de l'algèbre Q. Nous présentons sans démonstrations (elles sont de pure routine) quelques cas particuliers importants.

PROPOSITION IV.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) *Prime respecte le zéro q ou la somme $a \oplus b$ ou l'opération $a\alpha$ dans* Q;

ii) *Prime est un endomorphisme du module* Q;

iii) *p est idempotent dans* P;

iv) *Seconde respecte le zéro ou la somme ou l'opération externe dans* Q;

v) *Seconde est un endomorphisme du module* Q.

Alors: $a \times b = ap + pb - ab$ *et* $ab = a' \oplus b'' \ominus (a \times b)$.

L'élément e de P est *d-associatif* si pour tous a, b: $(ab)\, e = a\,(be)$; il est *associatif* si de plus: $(ae)\, b = a\,(eb)$ et $(ea)\, b = e\,(ab)$.

PROPOSITION IV.2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) *p est idempotent d-associatif dans* P;

ii) *Prime est un projecteur (endomorphisme idempotent) du module* Q, *commute avec seconde et vérifie:* $(a \times b)' = a \times b'$.

Alors prime respecte le produit dans Q si et seulement si: $(ap)\, bp = abp$.

Toutes les conditions de cette proposition sont réalisées si p est zéro à droite, idempotent central associatif, ou idempotent associatif vérifiant: $pxp = xp$ (propriété V de Chapitre IV de (2)).

PROPOSITION IV.3. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

i) p *est idempotent associatif dans* P;

ii) *Prime et seconde sont des projecteurs du module* Q, *commutent et vérifient*: $(a \times b)' = a \times b'$, $a' \times b = a \times b''$ *et* $(a \times b)'' = a'' \times b$.

PROPOSITION IV.4. *Si* P *est associative,* Q *est associative; dans les conditions de la Proposition* IV.3, *la réciproque est exacte.*

DÉFINITION IV.5. *La biunalgèbre* (S ,′,″) *est* autoaffine *s'il existe* h *et* k *dans* S *tels que pour tout* a : $a' = a \times k \oplus h$ *et* $a'' = k \times a \oplus h$.

Par exemple si z est zéro dans la préalgèbre P, (Q ,′,″) est autoaffine car: $a \times z = a' \ominus pp$ et $z \times a = a'' \ominus pp$. Du fait que toute préalgèbre peut être plongée dans une algèbre ((3) ou (4)) résulte:

THÉORÈME IV.6. *Toute biunalgèbre se plonge dans une biunalgèbre autoaffine.*

Nous venons d'appliquer le Théorème III.5 des préalgèbres vers les biunalgèbres; dans une prochaine note nous l'appliquerons dans l'autre sens.

RÉFÉRENCES

[1] A. BATBEDAT (1973) – *Préanneaux idempotents*, «Accademia Nazionale dei Lincei», ser. VIII, *55* (5) 325–330.

[2] A. BATBEDAT (1973) – *Préanneaux booléens Préanneaux zéro–neutres*, «Accademia Nazionale dei Lincei», ser. VIII, *55* (6), 645–649.

[3] A. BATBEDAT (1974) – *Sur la pondération dans un espace affine ou une préalgèbre*, «Comptes Rendus Acad. des Sc. Paris», *278*, A–737–739.

[4] A. BATBEDAT (1974) – *Prémodules préalgèbres et leur contexte affine*, Thèse de Doctorat d'état, Lyon.

[5] P. JANIN (1968) – *Préanneaux*, Thèse de Doctorat d'état, Lyon.