Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Sandra Tucci

Su una nuova classe di Fitting normale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **59** (1975), n.3-4, p. 229–231.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_3-4_229_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1975.

Algebra. — *Su una nuova classe di Fitting normale* (*). Nota (**) di SANDRA TUCCI, presentata dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — New examples of Fitting classes are given.

Sia $\mathscr{F}$ una classe di gruppi finiti.

Ricordiamo che $\mathscr{F}$ è detta una classe di Fitting se sono verificate le seguenti condizioni:

(i) Se $G \in \mathscr{F}$ e $N \trianglelefteq G$, allora $N \in \mathscr{F}$;

(ii) Se $G = N_1 N_2$ con $N_i \trianglelefteq G$ e $N_i \in \mathscr{F}$ $(i = 1, 2)$, allora $G \in \mathscr{F}$.

Sia G un gruppo finito e $\mathscr{F}$ una classe di Fitting.

Si dice $\mathscr{F}$ -radicale di G, e si indica con $G_{\mathscr{F}}$, l'unione dei sottogruppi normali di G, che appartengono ad $\mathscr{F}$.

Un sottogruppo H di G si dice $\mathscr{F}$-massimale se $H \in \mathscr{F}$ e non esiste alcun sottogruppo K di G con $K \in \mathscr{F}$ e $H \subset K$.

Una classe di Fitting $\mathscr{F}$ di gruppi risolubili è detta normale se per ogni gruppo finito risolubile G, $G_{\mathscr{F}}$ e $\mathscr{F}$-massimale.

Se A è un gruppo abeliano e *d* è una legge che associa ad ogni gruppo finito risolubile astratto G, un omomorfismo d_G di G in A, tale che:

(1) se $N \trianglelefteq G$, d_N coincide con la restrizione di d_G su N;

(2) $A = \cup G d_G$

allora la coppia (A , d) è detta una coppia di Fitting normale [3].

Ciascuna coppia di Fitting normale (A , d) definisce una classe di Fitting normale $\mathscr{F}$ costituita dai gruppi risolubili G, tali che $G d_G = 1$ [1].

Viceversa ([3]) ogni classe di Fitting normale non banale, può essere ottenuta a partire da una coppia di Fitting normale (A , d).

Nel presente lavoro si definisce una nuova classe di Fitting normale a partire dal gruppo di ordine 2.

1. Sia $\mathscr{S}$ la classe dei gruppi finiti risolubili e $A \equiv \{-1 , 1\}$ il gruppo d'ordine 2.

TEOREMA 1. *Per ogni gruppo* $G \in \mathscr{S}$, *indichiamo con* $\mathscr{D}_G$ *l'insieme dei 2-sottogruppi di Sylow di* G. *Sia* d_G *l'omomorfismo di* G *in* A, *tale che, per ogni* $g \in G$ è:

$$g d_G = \begin{cases} 1 & \textit{se } g \textit{ induce una permutazione di classe pari su } \mathscr{D}_G \\ -1 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1975.

Se d è l'applicazione che associa ad ogni $G \in S$, *l'omomorfismo* d_G, *allora la* (A, d) *è una classe di Fitting normale.*

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che l'applicazione f di $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$, che associa ad ogni gruppo $G \in \mathcal{S}$ il nucleo Gf di d_G, è un funtore di Fitting, ovvero che se $G \in \mathcal{S}$ e $H \trianglelefteq G$, risulta $Hf = Gf \cap H$.

Poiché Gf ha al più indice 2 in G, è sufficiente provare che, preso un 2-elemento $h \in H$, $h \in Hf$ se e solo se $h \in Gf$.

Sia $\mathcal{D}_H$ l'insieme dei 2-sottogruppi di Sylow di H.

Definiamo la seguente relazione $\underset{H}{\sim}$ su $\mathcal{D}_G$: se P e $Q \in \mathcal{D}_G$, poniamo $P \underset{H}{\sim} Q$ se e solo se $P \cap H = Q \cap H$. Chiaramente $\underset{H}{\sim}$ è di equivalenza.

Ciascuna classe di equivalenza [P] ha lo stesso numero di elementi r.

Infatti se $P \underset{H}{\not\sim} Q$ e se x è un elemento di G, che trasforma P in Q, x induce una biiezione fra [P] e [Q]. Inoltre il numero delle classi di equivalenza eguaglia la cardinalità $|\mathcal{D}_H|$ di $\mathcal{D}_H$.

Sia $s = |\mathcal{D}_H|$, allora $|\mathcal{D}_G| = rs$.

Preso quindi il 2-elemento $h \in H$, sia $(P, P^h, \cdots, P^{h^l})$ un ciclo relativo alla permutazione indotta da h su $\mathcal{D}_G$.

Si ha allora che $P^{h^i} \underset{H}{\not\sim} P^{h^j}$ per $i \neq j$, $0 \leq i, j \leq l$.

Se infatti è $P^{h^i} \underset{H}{\sim} P^{h^j}$, si ha $(P^{h^i} \cap H) = (P^{h^j} \cap H)$ e quindi $h^{i-j} \in N_H(P \cap H)$.

Ma $P \cap H$ è un 2-sottogruppo di Sylow di H e quindi h è un 2-elemento di $P \cap H$, onde $h^{i-j} \in P$ e quindi $P^{h^{i-j}} = P$. Date le limitazioni per i e j si conclude che $i = j$ come si voleva.

Quindi se m è il numero dei cicli operanti su oggetti diversi relativi alla permutazione indotta da h su $\mathcal{D}_G$, m/r è il numero dei cicli corrispondenti alla permutazione indotta da h su $\mathcal{D}_H$.

Se $h \in Hf$, il numero $s - m/r$ è pari e quindi anche $sr - m$ lo è, cioè $h \in Gf$.

Viceversa se $h \in Gf \cap H$, $sr - m$ è pari.

Poiché sr è dispari, m e m/r sono dispari e quindi $s - m/r$ è pari, cioè $h \in Hf$ come si voleva.

Da ciò segue che f è un funtore di Fitting e che (A, d) è una coppia di Fitting normale.

TEOREMA 2. *Indichiamo con* $\mathcal{F}$ *la classe di Fitting associata alla coppia* (A, d) *del Teorema* 1; $\mathcal{F}$ *è diversa dalle classi di Fitting finora note.*

Dimostrazione. Basterà esaminare le classi costruite secondo il metodo di Lausch [3] a partire dal gruppo d'ordine 2. Esse sono le seguenti:

(*a*) le classi ottenute mediante il Teorema 4.1 di Zappa [4] (tra cui rientrano quelle di Camina [2] e quelle del primo esempio di Blessenhol e Gaschütz [1].

Tali classi si ottengono in corrispondenza con le applicazioni di Fitting φ (una applicazione di Fitting è una legge φ che associa ad ogni gruppo G, un suo sottoinsieme normale $\varphi(G)$, tale che, se N è un sottogruppo normale di G, si abbia $\varphi(N) = N \cap \varphi(N))$ che soddisfano le seguenti condizioni:

(1) $\varphi(G) \subset O(G)$ (il massimo sottogruppo normale di G, d'ordine dispari);

(2) se $x \in \varphi(G)$ e i è un intero positivo primo con l'ordine di x, anche $x^i \in \varphi(G)$.

Ciascuna di esse è costituita dai gruppi G, tali che, ogni elemento di G, induce una permutazione di classe pari su $\varphi(G)$. Indicheremo con $\mathscr{F}_\varphi$ la classe ottenuta in questo modo, a partire dall'applicazione di Fitting φ.

(*b*) le classi ottenute nel modo seguente (cfr. Teorema 2.1 (Zappa [4]): Sia $\mathscr{F}$ una classe di Fitting e sia p un numero primo. Se G è un gruppo risolubile, sia $d_{G,\mathscr{F},p}$ l'omomorfismo di G nel gruppo moltiplicativo di GF (p) (il campo d'ordine p), che associa ad ogni $g \in G$, il prodotto dei determinanti delle sostituzioni lineari indotte da g nei p-fattori di una G-serie principale di $G_{\mathscr{F}}$.

Allora la classe dei gruppi G tali che, per ogni $g \in G$ è $(gd_{G,\mathscr{F},p})^{(p-1/2)} = 1$, è una classe di Fitting normale, che indicheremo con $\mathscr{H}_{\mathscr{F},p}$. (Essa si ottiene, ovviamente, a partire dal gruppo d'ordine 2).

Sia ora S_4 il gruppo simmetrico su 4 oggetti.

Si ha $O(S_4) = 1$ e quindi S_4 appartiene a ciascuna delle classi in *a*); d'altra parte $S_4 \notin \mathscr{F}$.

Sia infine q un numero primo e Q il gruppo di ordine q.

Sia 2^n la massima potenza di 2, che divide $q - 1$.

Q ha un gruppo di automorfismi Γ_q d'ordine 2^n.

L'olomorfo Ω_q di Q tramite Γ_q è un gruppo che non appartiene ad $\mathscr{F}$.

Infatti Ω_q ha esattamente q 2-sottogruppi di Sylow, e se a è un elemento di Ω_q di periodo 2^n, esso induce su $\mathscr{D}_{\Omega_q}$ una permutazione con cicli di lunghezza 2^n.

La parità della permutazione è data quindi dal numero $\left((q-1) - \left(\frac{q-1}{2^n}\right)\right)$ che è dispari, ovvero $\Omega_q \notin \mathscr{F}$.

Sia ora $\mathscr{H}_{\mathscr{F},p}$ una classe in *b*); se q è un numero primo con $q \neq p$, si ha, ovviamente, che $\Omega_q \in \mathscr{H}_{\mathscr{F},p}$.

Si conclude che la classe $\mathscr{F}$ è distinta da ciascuna delle classi in *a*) e *b*).

2. OSSERVAZIONE. Si possono costruire, in modo analogo, altre classi di Fitting $\mathscr{F}_\pi$, considerando, nel teorema 1, al posto dei 2-sottogruppi di Sylow, i π-sottogruppi di Hall, ove π è un insieme di numeri primi con $2 \in \pi$.

Si verifica facilmente che, se $\pi_1 \neq \pi_2$ sono due insiemi di numeri primi con $2 \in \pi_1 \cap \pi_2$, risulta $\mathscr{F}_{\pi_1} \neq \mathscr{F}_{\pi_2}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. BLESSENOHL e W. GASCHÜTZ (1970) – *Über normale Schunk-und Fitting-klassen*, «Math. Zeit.», *118*, 1–8.
[2] A. R. CAMINA (1974) – *A note on Fitting classes*, «Math. Zeit.», *136*, 351–352.
[3] H. LAUSCH (1973) – *On normal Fitting classes*, «Math. Zeit.», *130*, 67–72.
[4] G. ZAPPA, *Su certe classi di Fitting normali* (in corso di stampa nel «Bollettino U.M.I.»).