ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ANNA FRANCHETTA, FERNANDO TUCCILLO

Su una classe di gruppi ipercentrali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **59** (1975), n.3-4, p. 232–237.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_3-4_232_0>

Algebra. — *Su una classe di gruppi ipercentrali* (*). Nota (**) di ANNA FRANCHETTA e FERNANDO TUCCILLO, presentata dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this paper we prove a theorem which extends a result due to H. Heineken. We prove that if $n(G) \simeq n(H)$ (G hypercentral not locally cyclic p-group with property (P) in no. 1, H′ hypercentral group) then H is a hypercentral p-group. More generally: if $n(G) \simeq n(H)$ (G hypercentral torsion group, H soluble group) then H is a locally finite group.

1. I sottogruppi normali di un gruppo G riempiono un sottoreticolo modulare $n(G)$ del reticolo $l(G)$ dei sottogruppi di G.

Nel 1965, generalizzando un precedente risultato di M. Curzio [1], H. Heineken [4] ha ottenuto il Teorema (1):

Siano: G *un p-gruppo finito non ciclico*, H *un gruppo finito con derivato* H′ *nilpotente. Se* $n(G) \simeq n(H)$, H *è un p-gruppo (dello stesso ordine di* G).

Quanto sopra non è più valido se l'ipotesi di nilpotenza di H′ vien sostituita con una delle seguenti: H con torre di Sylow, H estensione di un gruppo nilpotente mediante un gruppo nilpotente, H′ supersolubile; ciò resta provato dal seguente:

ESEMPIO 1 (Heineken [4]). Risulta $n(G) \simeq n(H)$, dove:

$$G = \langle u , v \mid u^2 = v^8 = (uv)^2 = 1 \rangle$$

$$H = \langle a , b , c , d) \mid a^3 = b^3 = c^2 = d^4 = (cd)^4 = (ad)^2 =$$
$$= [a , b] = [d , b] = b^{-1} cac = 1 \rangle.$$

Può apparire naturale estendere il teorema di Heineken al caso infinito, supponendo: G p-gruppo ipercentrale e non localmente ciclico, H′ ipercentrale; ma ciò non è possibile, avendosi:

ESEMPIO 2. Risulta $n(G) \simeq n(H)$, dove:

$$G = \langle Z(2^{\infty}) , u \mid u^2 = 1 , x^u = x^{-1} \, (\forall x \in Z(2^{\infty})) \rangle$$

$$H = \langle Z(p^{\infty}) , v \mid v^2 = 1 , y^v = y^{-1} \, (\forall y \in Z(p^{\infty})) , p > 2 \rangle.$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni del C.N.R. (1974–75).

(**) Pervenuta all'Accademia il 10 ottobre 1975.

(1) Nomenclatura e notazioni sono quelle usuali nella teoria dei gruppi.

Una situazione più favorevole si presenta per i p-gruppi G appartenenti alla proprietà:

$$(\mathrm{P}) \equiv (se\ \mathrm{G}' \neq 1,\ esiste\ un\ \mathrm{G}'/\mathrm{N}\ con\ \mathrm{N} \lhd \mathrm{G}\ e\ |\,\mathrm{G}'/\mathrm{N}) = p),$$

proprietà non vera per il 2-gruppo G di cui all'Esempio 2.

Nel presente lavoro si dimostra che:

Siano: $\mathrm{G} \in (\mathrm{P})$ *un p-gruppo ipercentrale e non localmente ciclico*, H *un gruppo con* H' *ipercentrale. Se* $n(\mathrm{G}) \simeq n(\mathrm{H})$, H *è un p-gruppo ipercentrale della stessa cardinalità di* G.

La dimostrazione, ottenuta indipendentemente dal ricordato teorema di Heineken, permette di ritrovarlo per altra via.

Nel caso più generale (per alcuni aspetti) si è ottenuto:

Siano: G *un gruppo ipercentrale e di torsione*, H *un gruppo risolubile. Se* $n(\mathrm{G}) \simeq n(\mathrm{H})$, H *è localmente finito.*

Se $n(\mathrm{G}) \simeq n(\mathrm{H})$ con H risolubile e con G p-gruppo ipercentrale localmente ciclico o non, H può non essere un p-gruppo come segue dagli Esempi 1 e 2. Per ulteriori risultati si rimanda alle pagine seguenti.

2. Si premettono alcuni Lemmi utilizzati negli sviluppi successivi.

LEMMA 1. *Sia* G *risolubile di torsione a fattoriali abeliani* [2] *e non p-gruppo. Allora* G/G' *è localmente ciclico.*

Dimostrazione. Cfr. Curzio [3], pp. 156-157.

LEMMA 2. *Sia* G *un p-gruppo abeliano non localmente ciclico. Se* $l(\mathrm{G}) \simeq n(\mathrm{H})$, G *ed* H *sono isomorfi.*

Dimostrazione. Cfr. Curzio [2], p. 5.

LEMMA 3. *Sia* N *un sottogruppo localmente risolubile e normale minimale di un gruppo* G. *Se* [3] $\dfrac{\mathrm{G}}{\mathrm{N}\cdot \mathrm{Z_G}(\mathrm{N})}$ *è localmente finito* N *è abeliano elementare.*

Dimostrazione. Cfr. Kegel e Wehrfritz [5], p. 42.

LEMMA 4. *Sia* G *un gruppo dotato di una catena principale ascendente* $1 = \mathrm{N}_0 < \mathrm{N}_1 < \cdots < \mathrm{N}_\alpha < \mathrm{N}_{\alpha+1} < \cdots < \mathrm{N}_\beta = \mathrm{N} \lhd \mathrm{G}$, *con* N *ipercentrale e con* $\mathrm{N}_{\alpha+1}/\mathrm{N}_\alpha$ *normale minimale in* $\mathrm{G}/\mathrm{N}_\alpha$. *Allora se* G/N *è localmente finito, tale è pure* N.

Dimostrazione. Per l'ipercentralità di N si ha $\mathrm{N}_{\alpha+1}/\mathrm{N}_\alpha \cap \mathrm{Z}(\mathrm{N}/\mathrm{N}_\alpha) \neq 1$ e d'altra parte $\mathrm{Z}(\mathrm{N}/\mathrm{N}_\alpha) \lhd \mathrm{G}/\mathrm{N}_\alpha$; ma $\mathrm{N}_{\alpha+1}/\mathrm{N}_\alpha$ è normale minimale in $\mathrm{G}/\mathrm{N}_\alpha$ e così; $\mathrm{N}_{\alpha+1}/\mathrm{N}_\alpha \leq \mathrm{Z}(\mathrm{N}/\mathrm{N}_\alpha)$. Ne segue $\mathrm{Z}_{\mathrm{G}/\mathrm{N}_\alpha}(\mathrm{N}_{\alpha+1}/\mathrm{N}_\alpha) \geq \mathrm{N}/\mathrm{N}_\alpha$ e pertanto $\dfrac{\mathrm{G}/\mathrm{N}_\alpha}{\mathrm{Z}_{\mathrm{G}/\mathrm{N}_\alpha}(\mathrm{N}_{\alpha+1}/\mathrm{N}_\alpha)}$ è localmente finito essendo isomorfo ad un quoziente di G/N. In tal modo (cfr. Lemma 3) ogni $\mathrm{N}_{\alpha+1}/\mathrm{N}_\alpha$ è abeliano elementare e la dimostrazione si completa facilmente per induzione transfinita.

(2) Ossia: G non è abeliano e sono abeliani tutti i quozienti G/N con $1 \neq \mathrm{N} \lhd \mathrm{G}$.
(3) $\mathrm{Z_G}(\mathrm{N})$ è il centralizzante di N in G.

LEMMA 5. *Sia* $G \in (P)$ *un p-gruppo non localmente ciclico. Allora* G/G' *non è localmente ciclico.*

Dimostrazione. Se $G' = 1$, l'asserto è evidente. Supposto allora $G' \neq 1$, per la proprietà (P) esiste una sezione normale G'/N tale che sia $|G'/N| = p$.

Sia, per assurdo, G/G' localmente ciclico; allora tale risulta $\frac{G/N}{G'/N}$ ed inoltre, poiché G/N è un p-gruppo, $G'/N \leq Z(G/N)$. Conseguentemente, G/N risulta abeliano e quindi $N \geq G' > N$ il che è contraddittorio.

LEMMA 6. *Siano:* G *un p-gruppo ipercentrale,* φ *un'isomorfismo* $n(G) \to n(H)$. *Allora non esistono sottogruppi normali di torsione* $A \neq 1$, $B \neq 1$ *di* H *tra loro coprimi.*

Dimostrazione. Negando la tesi, siano $A \neq 1$ e $B \neq 1$ sottogruppi normali di torsione di H tra loro coprimi. Allora $AB = A \times B$ e, conseguentemente, $\varphi^{-1}(AB) = \varphi^{-1}(A) \times \varphi^{-1}(B)$.

Poiché G è ipercentrale, risulta $\varphi^{-1}(A) \cap Z(G) \neq 1 \neq \varphi^{-1}(B) \cap Z(G)$, onde esistono $M \leq \varphi^{-1} A$ ed $N \leq \varphi^{-1} B$ entrambi normali in G e tali che $|M| = p = |N|$. In $M \times N$ si trovano esattamente $p + 1$ sottogruppi normali minimali di G e d'altra parte in $\varphi M \times \varphi N$ i soli sottogruppi normali minimali di H sono φM e φN; ciò è evidentemente assurdo.

LEMMA 7. *Siano* $G \in (P)$ *un p-gruppo ipercentrale non localmente ciclico e* φ *un isomorfismo* $n(G) \to n(H)$. *Si ha* $H' = \varphi G'$ *e* $G/G' \simeq H/H'$.

Dimostrazione. G/G' è un p-gruppo abeliano non localmente ciclico (cfr. Lemma 5) ed inoltre $l(G/G') \simeq n(H/\varphi G')$; così, per il Lemma 2, risulta $G/G' \simeq H/\varphi G'$. Ne segue ovviamente $\varphi G' \geq H'$.

Negando la tesi, si abbia $\varphi G' > H'$. Riesce $n(G/\varphi^{-1} H') \simeq l(H/H')$ e, per l'ipercentralità di $G/\varphi^{-1} H'$, ogni sottogruppo $\neq 1$ di H/H' include qualche sottogruppo minimale, onde H/H' è di torsione.

Per il Lemma 6, il gruppo abeliano H/H' risulta primario ed è poi un p-gruppo al pari del quoziente $\frac{H/H'}{\varphi G'/H'} \simeq G/G'$; inoltre $\frac{H/H'}{\varphi G'/H'} \simeq G/G'$ non è localmente ciclico e quindi nemmeno H/H' lo è. Dall'essere poi $n(G/\varphi^{-1} H') \simeq$ $\simeq l(H/H')$ segue (cfr. Lemma 2) l'abelianità di $G/\varphi^{-1} H'$, ottenendo l'assurdo $H' \geq \varphi G' > H'$.

3. Si è ora in grado di ottenere il

TEOREMA 1. *Siano:* $G \in (P)$ *un p-gruppo ipercentrale e non localmente ciclico,* H *un gruppo con* H' *ipercentrale,* φ *un isomorfismo* $n(G) \to n(H)$. *Allora* H *è un p-gruppo ipercentrale della stessa cardinalità di* G.

Dimostrazione. Si ha (cfr. Lemma 7) $H' = \varphi G'$ ed $H/H' \simeq G/G'$; così il teorema resta provato nel caso $G' = 1$. Supposto $G' \neq 1$ (e quindi $H' \neq 1$) si riconoscerà quanto segue.

(*a*) H' è un q–gruppo (q numero primo).

Per l'ipercentralità del p–gruppo G, esiste una catena principale ascendente

$$1 = K_0 < K_1 < \cdots < K_\alpha < K_{\alpha+1} < \cdots < K_\beta = G' < G$$

con ogni $K_{\alpha+1}/K_\alpha$ normale minimale in G/K_α. La catena principale ascendente

$$1 = \varphi K_0 < \varphi K_1 < \cdots < \varphi K_\alpha < \varphi K_{\alpha+1} < \cdots < \varphi K_\beta = H' < H$$

verifica le ipotesi del Lemma 4 e pertanto H' è di torsione. L'essere H' ipercentrale assicura che $H' = A \times B$, con A q–gruppo $\neq 1$ (q numero primo) e con B coprimo ad A. I sottogruppi A e B sono normali in H e così (cfr. Lemma 6) riesce $B = 1$.

(*b*) $q = p$.

Sia per assurdo $q \neq p$. Per la proprietà (P) esiste $N \lhd G$ tale che $|G'/N| = p$, onde G'/N è normale minimale in G/N. Ne segue che $H'/\varphi N$ è normale minimale in $H/\varphi N$ e quindi abeliano per l'ipercentralità di H'.

Si consideri ora un $K \lhd H$ tale che $K > \varphi N$. Si ha $K \cap H' \geq \varphi N$, ed allora, per l'essere $H'/\varphi N$ normale minimale in $H/\varphi N$, si ottiene $K \cap H' = \varphi N$ oppure $K \cap H' = H'$. La prima eventualità non può presentarsi, giacché in tal caso $H'/\varphi N$ e $K/\varphi N$ sarebbero sottogruppi normali di torsione non identici e tra loro coprimi del gruppo $H/\varphi N$ (cfr. Lemma 6). Se ne deduce $K \geq H'$ ed il quoziente $\dfrac{H/\varphi N}{K/\varphi N}$ è abeliano; l'arbitrarietà di K assicura che $H/\varphi N$ è a fattoriali abeliani. Per il Lemma 1, il quoziente $\dfrac{H/\varphi N}{(H/\varphi N)'} \simeq H/H'$ è localmente ciclico, onde tale è pure $G/G' \simeq H/H'$, ciò che si rivela un assurdo per il Lemma 5.

(*c*) H è ipercentrale.

Si riconoscerà che l'ipercentro I di H non è un sottogruppo proprio. Se fosse $I < H$, tenuto conto che H localmente nilpotente [4] e che H/I ammette un sottogruppo normale minimale al pari di $G/\varphi^{-1} I$, si avrebbe [5] $Z(H/I) \neq 1$ contro l'essere I l'ipercentro di H.

(*d*) G ed H hanno la stessa cardinalità.

G possiede una catena principale ascendente

$$1 = N_0 < N_1 < \cdots < N_\alpha < N_{\alpha+1} < \cdots < N_\beta = G$$

con ogni $N_{\alpha+1}/N_\alpha$ di ordine p. Per l'isomorfismo $\varphi : n(G) \to n(H)$ e per l'essere H un p–gruppo ipercentrale, $1 = \varphi N_0 < \varphi N_1 < \cdots < \varphi N_\alpha < \varphi N_{\alpha+1} < \cdots < \varphi N_\beta = H$ è una catena principale ascendente con ogni $\varphi N_{\alpha+1}/\varphi N_\alpha$ di ordine p. Ne segue subito la (*d*).

(4) Il p–gruppo H è localmente nilpotente in quanto H' ed $H/H' \simeq G/G'$ sono localmente finiti.

(5) Un sottogruppo normale minimale di un gruppo localmente nilpotente è centrale (cfr., per esempio, [5], p. 12).

COROLLARIO 1. *Siano*: $G \in (P)$ *un* p*-gruppo di Černikov non localmente ciclico,* H *un gruppo con* H′ *ipercentrale,* φ *un isomorfismo* $n(G) \to n(H)$. *Allora* H *è un* p*-gruppo di Černikov.*

Dimostrazione. H è un p-gruppo ipercentrale (cfr. Teorema 1) e quindi è localmente nilpotente; inoltre il reticolo $n(H)$ è artiniano al pari di $n(G)$. Ne segue [6] (cfr. Kegel e Wehrfritz [5], p. 44) che H è di Černikov.

COROLLARIO 2. *Siano*: G *un* p*-gruppo nilpotente e non localmente ciclico con* G′ *finito,* H *un gruppo con* H′ *ipercentrale,* φ *un isomorfismo* $n(G) \to n(H)$. *Allora* H *è un.* p*-gruppo nilpotente.*

Dimostrazione. Nel caso $G' = 1$, G ed H sono isomorfi (cfr. Lemma 2) ed il teorema resta provato.

Supposto $G' \neq 1$, si farà induzione sull'ordine di G′.

Per la finitezza di G′, riesce $G \in (P)$, onde (cfr. Teorema 1) H è un p-gruppo ipercentrale. Considerata una sezione normale G'/N tale che $|N| = p$, il p-gruppo G/N non è localmente ciclico (in quanto $N \leq Z(G)$) ed inoltre $n(G/N) \simeq n(H/\varphi N)$; per l'ipotesi induttiva $H/\varphi N$ è nilpotente. Il sottogruppo φN è normale minimale nel p-gruppo ipercentrale H e pertanto $\varphi N \leq Z(H)$; ne segue subito la nilpotenza di H.

COROLLARIO 3. *Siano*: G *un* p*-gruppo di Černikov nilpotente e non localmente ciclico,* H *un* p*-gruppo con* H′ *ipercentrale,* φ *un isomorfismo* $n(G) \to n(H)$. *Allora* H *è un* p*-gruppo di Černikov nilpotente.*

Dimostrazione. $G/Z(G)$ è finito [7] e quindi tale risulta G′, sicché H è un p-gruppo nilpotente (cfr. Corollario 2). Si ha $G \in (P)$ per la finitezza di G′, onde (cfr. Corollario 1) H è di Černikov.

Si terminerà col seguente:

TEOREMA 2. *Siano*: G *un gruppo di torsione ipercentrale,* H *un gruppo risolubile,* φ *un isomorfismo* $n(G) \to n(G)$. *Allora* H *è localmente finito.*

Dimostrazione. Sia in primo luogo H abeliano. Allora, avendosi $n(G) \simeq l(H)$ e poiché G è ipercentrale, ogni sottogruppo $\neq 1$ di H possiede un sottogruppo minimale, onde H è di torsione.

Supposto $H' \neq 1$, si farà induzione sulla lunghezza derivata di H.

Detto $H^{(t)}$ l'ultimo derivato non identico di H, risulta ovviamente $n(G/\varphi^{-1} H^{(t)}) \simeq n(H/H^{(t)})$ e quindi $H/H^{(t)}$ è localmente finito. Poiché $H^{(t)}$ è abeliano, e quindi ipercentrale, per la ipercentralità di G e per l'isomorfismo $\varphi : n(G) \to n(H)$, esiste una catena principale ascendente $1 = N_0 < N_1 < \cdots \cdots < N_\alpha < N_{\alpha+1} < \cdots < N_\beta = H^{(t)} < H$; allora (cfr. Lemma 4) $H^{(t)}$ è localmente finito. L'asserto segue poi dal ben noto teorema di Šmidt.

(6) Un gruppo localmente nilpotente ed a condizione minimale sui sottogruppi normali è di Černikov.

(7) Un p-gruppo di Černikov G è nilpotente se (e solo se) è finito $G/Z(G)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. CURZIO (1961) – *Sui sottogruppi normali dei gruppi speciali*, « Rend. Accad. Sc. Fis. Mat. », Napoli, (4) *28*, 395–402.

[2] M. CURZIO (1965) – *Una caratterizzazione reticolare dei gruppi abeliani*, « Rend. di Mat. », *24*, 1–10.

[3] M. CURZIO (1967) – *Sui gruppi di torsione a fattoriali abeliani*, « Ricerche di Mat. », *16*, 154–161.

[4] H. HEINEKEN (1965) – *Über die Charakterisierung von Gruppen durch gewisse Untergruppenverbände*, « Journ. reine und angew. Math. », *220*, 30–36.

[5] O. KEGEL e B. A. F. WEHRFRITZ (1973) – *Locally finite groups*, North Holland Company Inc., N. Y.