Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Nicoletti

Su una nuova classe di spazi affini generalizzati di Sperner

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **59** (1975), n.3-4, p. 242–250.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_3-4_242_0>

Geometria. — *Su una nuova classe di spazi affini generalizzati di Sperner.* Nota (*) di GIORGIO NICOLETTI, presentata dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this paper a new class of Sperner's affine generalized spaces is constructed from desarguesian affine spaces of dimension 3 and order q^2 (q prime odd > 3 power); these spaces have the property of containing $q^3 + q^2 + q$ Hughes planes.

The procedure I have used can easily be applied to a similar affine desarguesian space of any (finite) dimension; in case of dimension 2 we find the (regular) Hughes plane of order q^2.

Sia q una potenza di un primo dispari, $q > 3$: indicheremo con lettere latine gli elementi di GF (q) e con lettere greche gli elementi di GF (q^2).

Si fissi un elemento $\theta \in \mathrm{GF}(q^2)$ di periodo $2(q-1)$; si ha allora

$$\theta \notin \mathrm{GF}(q) \qquad \text{e} \qquad \theta^q = -\theta\,.$$

Ogni elemento $\alpha \in \mathrm{GF}(q^2)$ può allora scriversi in uno ed un sol modo nella forma

$$\alpha = a_1 + \theta a_2 \qquad a_1\,,\, a_2 \in \mathrm{GF}(q)\,.$$

Assegnato un elemento $\alpha \in \mathrm{GF}(q^2)$ diremo suo *coniugato* l'elemento $\bar{\alpha} = \alpha^q$; se $\alpha = a_1 + \theta a_2$ si ha allora

$$\bar{\alpha} = \alpha^q = a_1 - \theta a_2$$

e pertanto

$$\alpha + \bar{\alpha} = 2\,a_1$$

$$\alpha - \bar{\alpha} = 2\,a_2$$

ed inoltre

$$\alpha = \bar{\alpha} \Longleftrightarrow \alpha \in \mathrm{GF}(q)\,.$$

Chiameremo *reali* gli elementi di GF (q) e *complessi* gli elementi di GF (q^2).

Indichiamo con Σ lo spazio affine desarguesiano costruito su GF (q^2) e con Π il suo sub–spazio costruito su GF (q).

Un punto di Σ si dirà *reale* se è anche punto di Π, cioè se ha coordinate tutte reali; una retta di Σ si dirà *reale* se contiene una retta di Π; una direzione si dirà *reale* se ammette parametri direttori tutti reali; un piano di Σ si dirà *reale* se contiene un piano di Π; una giacitura si dirà *reale* se ammette parametri di giacitura tutti reali.

Dato un punto $P = (\xi\,,\eta\,,\zeta)$ di Σ, diremo suo *coniugato* il punto $\overline{P} = P^q = (\xi^q, \eta^q, \zeta^q)$.

(*) Pervenuta all'Accademia il 10 ottobre 1975.

Assegnato un piano α di Σ, i coniugati dei suoi punti sono tutti *e* soli i punti di un piano che indicheremo con $\bar{\alpha} = \alpha^q$ e che chiameremo *coniugato* di α; se di α è assegnata un'equazione, allora $\bar{\alpha}$ è individuato dall'equazione i cui coefficienti sono i coniugati dei coefficienti dell'equazione di α.

Analogamente per le rette.

Sia l una retta di Σ e sia $\bar{l}$ la sua coniugata: si avvera una ed una sola delle seguenti affermazioni: *i*) l e $\bar{l}$ sono coincidenti; *ii*) l e $\bar{l}$ sono incidenti; *iii*) l e $\bar{l}$ sono parallele; *iv*) l e $\bar{l}$ sono sghembe.

Una retta si dirà *di tipo* q, 1, O_p, O_s rispettivamente se soddisfa la condizione *i*), *ii*), *iii*), *iv*).

Le rette di tipo q sono tutte e sole le rette reali: ciascuna di esse possiede esattamente q punti reali e direzione reale ed è incidente esattamente a $q+1$ piani reali.

Ogni retta di tipo 1 possiede un solo punto reale, che si dirà *vertice*, ha direzione non reale ed è incidente ad uno ed un solo piano reale.

Ogni retta di tipo O_p è priva di punti reali, ha direzione reale ed è incidente ad uno ed un solo piano reale.

Infine ogni retta di tipo O_s è priva di punti reali, ha direzione non reale e non è incidente ad alcun piano reale.

Procediamo ora a stabilire un criterio per separare in due classi distinte i punti di una retta di tipo 1 diversi dal suo vertice, e ad analizzare le proprietà di tali classi.

1. PROPOSIZIONE. *Siano* A, B, C *tre punti allineati e distinti di* Σ, *e sia*

$$C = A + \gamma (B - A) \qquad \textit{con} \quad \gamma \in GF(q^2);$$

sia P *un punto della retta* $\langle A, B \rangle$ *tale che*

$$P = A + \lambda (B - A)$$

$$P = A + \mu (C - A) \qquad \textit{con} \quad \lambda, \mu \in GF(q^2)$$

allora

$$\lambda = \mu\gamma .$$

Dimostrazione. Ovvia.

2. PROPOSIZIONE. *Sia* l *una retta di tipo* 1 *di* Σ *e sia* V *il suo vertice; siano* A *e* B *due punti distinti di* l *e diversi da* V, *e sia*

$$B = V + \lambda (A - V) \qquad \textit{con} \quad \lambda \in GF(q^2)$$

e si supponga inoltre che la retta $\langle A, \bar{B} \rangle$ *sia di tipo* 1 *e sia* W *il suo vertice; sia*

$$\bar{B} = W + \mu (A - W) \qquad \textit{con} \quad \mu \in GF(q^2);$$

allora λ *è un quadrato in* $GF(q^2)$ *se e solo se* μ *è un quadrato in* $GF(q^2)$.

Dimostrazione. Poiché V è reale, non è restrittivo limitarsi al caso in cui $V = (O, O, O)$; si ha dunque $B = \lambda A$ e perciò $\overline{\lambda A} = (1 - \mu) W + \mu A$ da cui

$$W = \frac{1}{1-\mu} (\overline{\lambda A} - \mu A)$$

e la coniugata

$$\overline{W} = \frac{1}{1-\overline{\mu}} (\lambda A - \overline{\mu A}) ;$$

confrontando e riordinando si ottiene

$$[(1 - \overline{\mu}) \overline{\lambda} + (1 - \mu) \overline{\mu}] \overline{A} = [(1 - \mu) \lambda + (1 - \overline{\mu}) \mu] A$$

ma A è non reale, pertanto deve essere

$$(1 - \overline{\mu}) \overline{\lambda} + (1 - \mu) \overline{\mu} = 0 = (1 - \mu) \lambda + (1 - \overline{\mu}) \mu$$

di qui risolvendo si ottiene

$$\mu = -\lambda \frac{\overline{\lambda} - 1}{\lambda - 1} = \lambda (-1) (\lambda - 1)^{q-1}$$

ma in $GF(q^2)$ gli elementi -1 e $(\lambda - 1)^{q-1}$ sono entrambi quadrati, e quindi μ è quadrato se e solo se è quadrato λ.

3. PROPOSIZIONE. *Sia* l *una retta di tipo* 1 *di* Σ, *e sia* V *il suo vertice; siano* A *e* B *due suoi punti distinti e diversi da* V, *e sia*

$$B = V + \lambda (A - V) \qquad \textit{con} \quad \lambda \in GF(q^2)$$

si supponga inoltre che la retta $\langle A, \overline{B} \rangle$ *sia di tipo* O_p, *cioé sia parallela alla sua coniugata* $\langle \overline{A}, B \rangle$; *allora* λ *è un quadrato in* $GF(q^2)$.

Dimostrazione. La retta $\langle A, B \rangle$ è di tipo O_p se e solo se $\overline{B} - A$ è proporzionale a $B - \overline{A}$; ma $\overline{B} - A = (V - A) - \lambda (V - \overline{A})$ e $B - \overline{A} = (V - \overline{A}) - \overline{\lambda} (V - A)$: di qui si ricava che ciò avviene se e solo se $\lambda\overline{\lambda} = 1$; sia ε un generatore del gruppo moltiplicativo di $GF(q^2)$ e sia $\lambda = \varepsilon^x$; si ha allora:

$$1 = \lambda\overline{\lambda} = \varepsilon^x \varepsilon^{xq} = \varepsilon^{x(q+1)}$$

e dunque

$$x (q + 1) = h (q^2 - 1)$$

con h intero positivo, e pertanto

$$x = h (q - 1) ;$$

dunque x è pari e quindi λ è quadrato.

Sia l una retta di tipo 1 di Σ, e sia $\overline{l}$ la sua coniugata; indichiamo con V il suo vertice; se A e B sono punti di l diversi da V, poniamo

$$A \sim B$$

se e solo se

$$B = V + \lambda (A - V)$$

con $\lambda \neq 0$, λ quadrato in $GF(q^2)$, ed analogamente per i punti di $\bar{l}$.

4. PROPOSIZIONE. *La relazione precedentemente definita è di equivalenza sull'insieme dei punti di* l *diversi dal vertice* V, *ed induce su di esso una partizione in due classi. Inoltre se* $A, B \in l$ *si ha che* $\bar{A}, \bar{B} \in \bar{l}$, *e* $A \sim B$ *se e solo se* $\bar{A} \sim \bar{B}$.

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla Prop. 1.

Assegnata una retta l di tipo 1 di Σ, di parametri direttori $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ indicheremo con $D(l)$ la terna di parametri direttori di l così definita:

$$D(l) = (1, \lambda_2/\lambda_1, \lambda_3/\lambda_1) \qquad \text{se} \quad \lambda_1 \neq 0$$

$$D(l) = (0, 1, \lambda_3/\lambda_2) \qquad \text{se} \quad \lambda_1 = 0$$

(non può essere $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ché altrimenti l avrebbe direzione reale, contro l'ipotesi che l sia di tipo 1).

Assegnata una retta l di Σ indicheremo con $\mathfrak{P}(l)$ l'insieme dei suoi punti.

Sia ora V il vertice della retta l di tipo 1; il punto $A = V + D(l)$ è incidente alla retta l; poniamo allora:

$$\mathfrak{R}(l) = \{B \in l \mid B = V + \lambda (A - V), \lambda \neq 0, \lambda \text{ quadrato in } GF(q^2)\}$$

$$\mathfrak{V}(l) = \{B \in l \mid B = V + \lambda (A - V), \lambda \neq 0, \lambda \text{ non quadrato in } GF(q^2)\}$$

$\mathfrak{R}(l)$ si dirà l'*insieme dei punti rossi di* l, e $\mathfrak{V}(l)$ si dirà l'*insieme dei punti verdi di* l. Ovviamente si ha

$$\mathfrak{P}(l) = \{V\} \cup \mathfrak{R}(l) \cup \mathfrak{V}(l)$$

$$\emptyset = \mathfrak{R}(l) \cap \mathfrak{V}(l)$$

5. PROPOSIZIONE. *Sia* l *una retta di tipo* 1 *di* Σ *e sia* B *un suo punto diverso dal suo vertice* V; *allora il colore di* B *rispetto a* l *è lo stesso colore di* $\bar{B}$ *rispetto a* $\bar{l}$, *cioè*

$$B \in \mathfrak{R}(l) \Longleftrightarrow \bar{B} \in \mathfrak{R}(\bar{l}).$$

Dimostrazione. Poniamo $A = V + D(l)$ e $\bar{A} = V + \overline{D(l)}$;

se $B = V + \lambda (A - V)$ allora $\bar{B} = V + \bar{\lambda}(\bar{A} - V)$ e quindi $B \in \mathfrak{R}(l) \Longleftrightarrow \lambda \neq 0$,

λ è quadrato in $GF(q^2) \Longleftrightarrow \bar{\lambda} \neq 0$, $\bar{\lambda}$ è quadrato in $GF(q^2) \Longleftrightarrow \bar{B} \in \mathfrak{R}(\bar{l})$.

6. PROPOSIZIONE. *Sia* l *una retta di tipo* 1 *di* Σ *e sia* V *il suo vertice; siano* A *e* B *due suoi punti distinti e diversi da* V; *indichiamo con* m *la retta* $\{A, \bar{B}\}$; *allora* m *è o di tipo* 1 *o di tipo* O_p; *nel primo caso si ha che* A *e* B

hanno – rispetto a l *– lo stesso colore se e solo se* A *e* $\overline{\mathrm{B}}$ *hanno lo stesso colore rispetto a* m; *nel secondo caso si ha che comunque* A *e* B *hanno lo stesso colore rispetto a* l.

Dimostrazione. La coniugata della retta m è la retta $\bar{m} = \langle \overline{\mathrm{A}}, \mathrm{B} \rangle$, complanare a m e distinta da essa: m perciò non può essere né di tipo q né di tipo O_s; le restanti affermazioni si deducono dalle Prop. 2 e 3.

Procediamo ora alla costruzione di una nuova struttura affine di incidenza.

Sia l una retta di Σ; poniamo

$$l_{\mathrm{H}} = \mathfrak{P}(l)$$

se l non è di tipo 1

$$l_{\mathrm{H}} = \{\mathrm{V}\} \cup \mathfrak{R}(l) \cup \mathfrak{V}(\bar{l})$$

se l è di tipo 1 e di vertice V; si ha allora ovviamente $\bar{l}_{\mathrm{H}} = \{\mathrm{V}\} \cup \mathfrak{R}(\bar{l}) \cup \mathfrak{V}(l)$; all'insieme l_{H} ora definito assegneremo come *direzione* la direzione di l in Σ.

Indichiamo con $\Omega = (\mathscr{P}, \mathscr{R}, \mathscr{I}, \P)$ la struttura d'incidenza così definita: l'insieme $\mathscr{P}$ dei *punti* di Ω è costituito dai punti di Σ; l'insieme $\mathscr{R}$ delle *rette* di Ω è costituito dagli insiemi l_{H} precedentemente definiti, l'*incidenza* $\mathscr{I}$ è l'appartenenza; il *parallelismo* $\P$ è così definito: due rette l_{H} e m_{H} sono parallele se e solo se hanno la stessa direzione.

7. PROPOSIZIONE. *Due punti distinti di* Ω *sono incidenti ad una ed una sola retta di* Ω.

Dimostrazione. Siano A e B i punti assegnati: essi sono incidenti ad una retta di Ω se e solo se si verifica almeno una delle seguenti condizioni:

a) in Σ A e B sono incidenti ad una retta l non di tipo 1; allora in Ω A e B sono incidenti alla retta l_{H};

b) in Σ A e B sono punti rossi della retta l di tipo 1; allora in Ω A e B sono incidenti alla retta l_{H};

c) in Σ A e B sono punti verdi della retta l di tipo 1; allora in Ω A e B sono incidenti alla retta $\bar{l}_{\mathrm{H}}$;

d) in Σ A è vertice e B è punto rosso della retta l di tipo 1; allora in Ω A e B sono incidenti alla retta l_{H};

e) in Σ A è vertice e B è punto verde della retta l di tipo 1; allora in Ω A e B sono incidenti alla retta $\bar{l}_{\mathrm{H}}$;

f) in Σ A è punto rosso e $\overline{\mathrm{B}}$ è punto verde della retta l di tipo 1; allora in Ω A e B sono incidenti alla retta l_{H}.

Osserviamo innanzitutto che almeno una delle sei condizioni sopra elencate si avvera in ogni caso, e pertanto in Ω due punti distinti sono sempre incidenti ad almeno una retta.

Inoltre le sei condizioni elencate si escludono a vicenda, e poiché in Ω i punti A e B sono incidenti ad una retta *solo* quando *almeno una* di tali condizioni è soddisfatta, ne dobbiamo concludere che in Ω due punti distinti sono incidenti ad una ed una sola retta.

8. PROPOSIZIONE. *La relazione di parallelismo tra rette di Ω è di equivalenza.*

Dimostrazione. Ovvia.

9. PROPOSIZIONE. *Siano l e m due rette distinte di tipo* 1 *di Σ aventi la stessa direzione* $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *di vertici* V *e* W *rispettivamente, e si supponga ohe l e $\bar{m}$ siano complanari; sia* B *l'intersezione di l e $\bar{m}$ e sia*

$$(\star) \qquad \begin{aligned} B &= V + \lambda A & \lambda &\in GF(q^2) \\ B &= W + \mu \bar{A} & \mu &\in GF(q^2) \end{aligned}$$

allora λ è quadrato se e solo se è quadrato μ.

Dimostrazione. Sottraendo membro a membro le $(\star)$ e le relative coniugate e confrontando si ha:

$$(\bar{\mu} + \lambda) A = (\mu + \bar{\lambda}) \bar{A}$$

i due membri di questa eguaglianza sono coniugati, e perciò $(\bar{\mu} + \lambda) A$ è reale, ma poiché per ipotesi la direzione A è non reale deve essere $\bar{\mu} + \lambda = 0$, cioè $\bar{\mu} = -\lambda$; ma -1 è quadrato in $GF(q^2)$ e dunque μ è quadrato se e solo se $\bar{\mu}$ è quadrato se e solo se λ è quadrato.

10. PROPOSIZIONE. *Siano l e m due rette di tipo* 1 *di Σ distinte ed aventi la stessa direzione, e sia l complanare con $\bar{m}$; detto* B *il punto d'intersezione di l e $\bar{m}$, si ha che* B *ha lo stesso colore rispetto a l ed a m.*

Dimostrazione. Segue dal n. 9.

11. PROPOSIZIONE. *Due rette di Ω parallele e distinte non hanno punti in comune.*

Dimostrazione. Siano l_H e m_H due rette di Ω parallele e distinte; se la loro comune direzione è reale, allora le corrispondenti rette l e m di Σ sono o di tipo q o di tipo O_p, e sono prive di punti comuni, e quindi anche l_H e m_H sono prive di punti comuni.

Supponiamo ora che la comune direzione di l_H e m_H sia non reale; se l e m in Σ sono entrambe di tipo O_s, allora non hanno punti in comune, e così dicasi di l_H e m_H in Ω; se invece l è di tipo 1 e m è di tipo O_s abbiamo che questa ultima non può giacere nel piano individuato da l e $\bar{l}$, essendo questo reale, e quindi la retta m sarà ad esso parallela: dunque m non ha punti in comune né con l né con $\bar{l}$; ed allora anche l_H e m_H sono prive di punti comuni in Ω; supponiamo infine che l e m siano entrambe di tipo 1; siano rispettivamente

π_1 e π_2 i piani (reali) individuati da l e $\bar{l}$ e da m e $\bar{m}$: se π_1 e π_2 sono diversi allora risultano paralleli, e quindi la retta l non ha punti in comune né con m né con $\bar{m}$, e così dicasi per $\bar{l}$; pertanto l_H e m_H sono prive di punti comuni; se invece π_1 coincide con π_2 allora per la Prop. 10 si ha che il punto B intersezione di l e $\bar{m}$ ha rispetto ad esse lo stesso colore, ed altrettanto dicasi per il punto C intersezione di $\bar{l}$ e m; pertanto se V e W sono i vertici di l e m si ha:

$$l_H \cap m_H = (\{V\} \cup \mathfrak{R}(l) \cup \mathfrak{B}(\bar{l})) \cap (\{W\} \cup \mathfrak{R}(m) \cup \mathfrak{B}(\bar{m})) =$$

$$= (\mathfrak{R}(l) \cap \mathfrak{R}(m)) \cup (\mathfrak{R}(l) \cap \mathfrak{B}(\bar{m})) \cup (\mathfrak{B}(\bar{l}) \cap \mathfrak{R}(m)) \cup (\mathfrak{B}(\bar{l}) \cap \mathfrak{B}(\bar{m})) = \varnothing .$$

Dunque in ogni caso l_H e m_H non hanno punti in comune.

12. PROPOSIZIONE. *Ogni retta di* Ω *è incidente a* q^2 *punti.*

Dimostrazione. Segue dalla definizione stessa di retta di Ω.

13. PROPOSIZIONE. *Fissati in* Ω *un punto ed una direzione, per quel punto passa una ed una sola retta parallela a tale direzione.*

Dimostrazione. Tenuto conto del fatto che i punti di Ω sono q^6 e le rette di una direzione sono q^4, mutuamente prive di punti comuni, e ciascuna dotata di q^2 punti, si ricava che per ogni punto di Ω passa una ed una sola retta parallela alla direzione assegnata.

14. PROPOSIZIONE. *Ad ogni punto di* Ω *sono incidenti* $q^4 + q^2 + 1$ *rette.*

Dimostrazione. Sia P un punto di Σ: ad esso sono incidenti in Σ $q^4 + q^2 + 1$ rette; se P è reale e l è una retta di Σ si ha:

$$\text{in } \Sigma \ \ P \in l \Longleftrightarrow \text{in } \ \Omega \ \ P \in l_H$$

e dunque a P sono incidenti in Ω $q^4 + q^2 + 1$ rette; se invece P è non reale e l è una retta di Σ non di tipo 1 si ha:

$$\text{in } \Sigma \ \ P \in l \Longleftrightarrow \text{in } \ \Omega \ \ P \in l_H$$

nel caso in cui invece l è una retta di tipo 1 si ha:

$$\text{in } \Sigma \ \ P \in \mathfrak{R}(l) \Longleftrightarrow \text{in } \ \Omega \ \ P \in l_H$$

$$\text{in } \Sigma \ \ P \in \mathfrak{B}(l) \Longleftrightarrow \text{in } \ \Omega \ \ P \in \bar{l}_H$$

e dunque anche in questo caso si ricava che le rette per P sono $q^4 + q^2 + 1$.

Ricordiamo che si dice *spazio affine generalizzato di Sperner* o S-*spazio* una struttura affine d'incidenza $\Xi = (\mathscr{P}, \mathscr{R}, \mathscr{I}, \P)$ ove: $\mathscr{P}$ e $\mathscr{R}$ sono insiemi disgiunti, i cui elementi si diranno rispettivamente *punti* e *rette*; $\mathscr{I}$ è una relazione binaria da P a R detta *incidenza* e $\P$ è una relazione di R in sé detta *parallelismo*;

debbono inoltre essere soddisfatti i seguenti assiomi;

S_1) due punti distinti sono incidenti ad una ed una sola retta

S_2) ogni retta è incidente ad uno stesso numero cardinale (≥ 2) di punti, numero che chiameremo *ordine* dell'S–spazio;

S_3) il parallelismo è una relazione d'equivalenza;

S_4) fissati comunque un punto P ed una retta l esiste una ed una sola retta parallela a l ed incidente a P.

Risulta allora che ad ogni punto di un S–spazio è incidente lo stesso numero cardinale di rette; nel caso finito, detto k tale numero, e detto q l'ordine dell'S–spazio, diremo che esso da *dimensione regolare n* se risulta

$$k = \frac{q^n - 1}{q - 1} .$$

È immediato provare che un S–spazio di dimensione regolare 2 è un ordinario piano affine (cfr. [1], [2]).

15. TEOREMA. *Ω è un S–spazio d'ordine q^2 e di dimensione regolare eguale a 3.*

Dimostrazione. Che Ω sia un S–spazio d'ordine q^2 lo si ricava dalle proposizioni precedenti; esso ha inoltre dimensione regolare: infatti detto k il numero delle rette incidenti ad uno stesso punto si ha per la Prop. 14

$$k = \frac{q^6 - 1}{q^2 - 1} = \frac{(q^2)^3 - 1}{q^2 - 1} .$$

Diremo che una sottostruttura Ω' di Ω è un *piano contenuto in* Ω se risulta anch'esso un S–spazio, con ordine eguale all'ordine di Ω, ma di dimensione regolare eguale a 2 (e quindi Ω' è un ordinario piano affine).

Se π è un piano di Σ indichiamo con $\Omega_{|\pi}$ la "sottostruttura" di Ω i cui punti sono i punti di π in Σ e le cui rette sono del tipo l_H con l retta di π in Σ.

16. PROPOSIZIONE. *Sia π un piano reale di Σ: allora $\Omega_{|\pi}$ è un piano di Hughes e pertanto Ω contiene $q^3 + q^2 + q$ piani di Hughes, e quindi in particolare π è non desarguesiano.*

Dimostrazione. La sottostruttura $\Omega_{|\pi}$ è il piano di Hughes regolare di ordine q^2 (cfr. [2]). In corrispondenza di ogni piano reale di Σ si ottiene dunque un piano di Hughes contenuto in Ω; poiché i piani reali in Σ sono $q^3 + q^2 + q$, se ne conclude che altrettanti sono i piani di Hughes contenuti in Ω.

Notiamo che in Σ esistono esattamente $q^4 - q$ piani privi di punti reali: essi sono tutti e soli quelli di equazione del tipo

$$a\xi + b\eta + c\zeta + \delta = 0 \qquad \text{ove} \quad a , b , c \in \mathrm{GF}(q) , \delta \notin \mathrm{GF}(q) .$$

17. PROPOSIZIONE. *Sia* π *un piano di* Σ *privo di punti reali*: *allora* $\Omega_{|\pi}$ *è un piano desarguesiano e dunque* Ω *contiene* $q^4 - q$ *piani desarguesiani.*

Dimostrazione. Le rette della sottostruttura $\Omega_{|\pi}$ sono tutte del tipo l_H con l retta di π; ma π possiede solo rette di tipo O_p e O_s, e dunque $\Omega_{|\pi}$ è isomorfo a π, e quindi desarguesiano. Da quanto notato sopra segue dunque l'asserto.

18. PROPOSIZIONE. *Sia* π *un piano di* Σ: *allora* $\Omega_{|\pi}$ *è un piano di* Ω *se e solo se* π *è reale o privo di punti reali.*

Dimostrazione. Una delle due implicazioni è provata dalle Proposizioni 16 e 17. Supponiamo ora che $\Omega_{|\pi}$ sia un piano di Ω e che π sia dotato di punti reali: sia P uno di tali punti; allora per P passa almeno una retta l di tipo I contenuta in π; si ha allora che in $\Omega_{|\pi}$ sono contenuti i punti rossi di l ma anche i punti verdi di $\bar{l}$, e dunque in π deve essere contenuta tutta la retta $\bar{l}$: pertanto π risulta reale, perché contiene una retta e la sua coniugata. Con ciò l'asserto è completamente dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BARLOTTI (1965) – *Alcuni risultati nello studio degli spazi affini generalizzati di Sperner*, « Rendic. Sem. Mat. Padova », *35*, 18–46.

[2] R.C. BOSE (1973) – *On a representation of Hughes Planes.* Proc. of the International Conference on Projective Planes, Washington State University Press, pp. 27–70.

[3] P. DEMBOWSKI (1968) – *Finite geometries.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[4] E. SPERNER (1966) – *Affine Räume mit schwacher Inzidenz und zugehörige algebraische Strukturen.* « J. Reine angew. Math. », *204*, 205–215.

[5] E. SPERNER (1962–63) – *On non desarguesian geometries.* Seminari dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica, Roma, 574–594.